MAGYAR PEDAGÓGIA
105. évf. 4. szám 343–358. (2005)

# A MATEMATIKAI PROBLÉMAMEGOLDÁST KÍSÉRŐ METAKOGNITÍV STRATÉGIÁK VIZSGÁLATA A HANGOSAN GONDOLKODTATÁS ÉS A VIDEOMEGFIGYELÉS ESZKÖZEIVEL

**Kelemen Rita*, Csíkos Csaba* és Steklács János****
** Szegedi Tudományegyetem, Neveléstudományi Tanszék*
*** Kecskeméti Főiskola*

A fejlett európai országokban a huszadik század közepére ér el a tudományos-technológiai fejlődés arra a szintre, hogy világossá válik: az új igényekhez az oktatási rendszer már nem képes igazodni. Az elmúlt évtizedekben egyre nagyobb igény formálódik a társadalmi szereplők irányából arra, hogy az iskolarendszerünkben, már az alapszintű képzéstől kezdődően, a valós élethelyzetek megoldására vonatkozó ismeretek, kompetenciák jelenjenek meg. Ennek megfelelően a matematika tantárgy egyik legfontosabb, nemzetközi és hazai fórumokon egyaránt deklarált szerepe, hogy felkészítse a diákokat az életben való eligazodásra életszerű problémák megismerésével és azok megoldásának begyakorlásával. Az 1995-ös Nemzeti Alaptanterv is ebben a szellemben készült, és az új *NAT* is kiemelt fejlesztési területként írja le „a modellek érvényességi körének és a gyakorlatban való alkalmazhatóságának eldöntésére alkalmas kompetenciák és képességek kialakítása” területet (*NAT*, 1935. 37. o.) A nemzetközi szakirodalomban gyakran idézett tanulmány szerint a modern matematikaoktatás fő célkitűzése, hogy felkészítse az embereket az úgynevezett való életből vett feladatok megoldására (*Wyndhamn* és *Säljö*, 1997).

E célkitűzések megfogalmazásához részben azok a kutatási eredmények vezettek, amelyek kimutatták, hogy jelentősen megváltozik a tanulói teljesítmény, ha a feladatok tartalmát vagy kontextusát megváltoztatjuk. A következőkben ezért három tényezőt vizsgálunk meg, amelyek az eddigi kutatásokban is kiemelkedő jelentőséggel bírtak és a legnagyobb valószínűség szerint a jövőben is fontos szerepet játszanak majd. (1) Elsőként azt mutatjuk be, hogy milyen változást hoz, ha az úgynevezett „*realisztikus*” matematikai feladatokkal teszteljük a tanulói matematikatudást. Fontos már most megemlítenünk azt a tényt, amely szerint, ha a tanulók a hétköznapi környezetből vett dolgokkal, és azok viszonyaival kapcsolatos feladatot kapnak, akkor gyakran nehézséget okoz számukra a matematikai modell felállítása. (2) Célkitűzésként megfogalmazható, hogy a tanulói teljesítmény legyen megfelelő szintű a realisztikus, valamint a valóságos viszonyok modellezését nem feltétlenül kívánó feladatok esetében is. A matematikai problémamegoldás metakognitív stratégiáinak fejlesztésétől azt reméljük, hogy a felnövekvő generáció a drill jellegű feladatokon, és a realisztikus matematikai problémákon egyaránt megfelelő teljesítményt nyújt majd. (3) Nyilvánvaló, hogy egy matematikai probléma nem válik csupán azáltal életszerűvé, mert abban hétköznapi kifejezések és valós környezetből vett fogalmak szerepelnek. A matematikai problémát körülvevő információs környezet, vagyis a feladat *kontextus*a, nagymértékben meghatározza a matematikai gondolkodásunk stratégiai komponenseinek működését.

## Realisztikus matematika

Az életszerű szituációk, valós problémák matematikaórán történő felvetésére, a matematika absztrakt fogalmainak gyakorlati használatának megmutatására alkalmasak a szöveges feladatok (*Józsa* és *Székely*, 2004). Nem egyértelmű azonban, hogy egy matematikai szöveges feladatot vagy problémát mikor tekintünk életszerűnek, avagy – divatos idegen szóval – realisztikusnak. Lehet olyan leírást adni, amelyben a hétköznapi élet jelenségeit, viszonyait szerepeltetjük, és ezek matematikai modellezését várjuk el a tanulótól, de egy ilyen meghatározás meglehetősen kultúrafüggő és más okokból is pontatlan lenne. Van olyan értelmezés is, amely a szemantikai gazdagságot, a rosszul definiáltságot vagy az intranszparenciát tekinti az életszerűség ismérveinek (lásd *Molnár*, 2002). A matematikai feladatok életszerűségének verbális deskripciója helyett célszerű *Greer* (1997) gondolatmenetét követni. *Greer Freudenthal* egyik vizsgálatát idézi föl, amelyben a következő feladat szerepelt: „Kovács úr hentesüzletében 26 kg hús van, és rendel még hozzá 10 kg-ot. Mennyi hús van most az üzletében?" Ha a feladatot valóban a minket körülvevő valóság leírásának tekintjük, akkor akár úgy is okoskodhatunk, hogy bizonyos időbe telik, amíg megérkezik a 10 kg hús, és addig valószínűleg sikerül eladni a meglévő készletből. *Greer* szerint a matematikai szöveges feladatoknak van egy sajátos megjelenési formája, stílusa, amelyet szükséges ismerni ahhoz, hogy azokat a tanuló meg tudja oldani. Ez a megjelenési forma generálja azokat a tanulói meggyőződéseket, amelyeket *Reusser* és *Stebler* (1997) részletesen feltártak, és amelyeket korábbi írásainkban már mi is áttekintettünk (*Csíkos*, 2003; *Kelemen*, 2004). A tanulói meggyőződések között szerepel, hogy a szöveges feladatoknak mindig van egy helyes megoldása, amelyet a feladat szövegében szereplő számadatok felhasználásával, legtöbbször egy vagy két alapművelet elvégzésével megkaphatunk. Teljesen mindegy tehát, hogy 26 kg hús mellé 10 kg-ot rendel a hentes vagy 26 üveggolyó mellé tíz darabot kapok ajándékba. Nem a valóságban, a hétköznapi életben szereplő dolgok és viszonyok modellezése a tényleges feladat, hanem a feladat típusának, „zsánerének" (genre, lásd *Greer*, 1997) a felismerése. Amikor *Verschaffel, Greer* és *De Corte* (2000) arról értekeznek, hogy a matematikai szöveges feladatok társadalmi-kulturális környezetükben értelmezendők, olyan feladatokat is bemutatnak, amelyek az ókortól kezdve a matematikai nevelés eszközei voltak, és amelyek valóban hétköznapi problémák matematikai modellezését igényelték. A folyammenti kultúrák öntözőárkainak megtervezése valóban életszerű feladat. Attól a pillanattól kezdve viszont, amikor a gyakorlás eszközévé válik, és a tartalma tetszőlegesen módosítható a matematikai szerkezet megtartása mellett, már nem feltétlenül érdemes életszerűnek tekintenünk.

Alapelvünk lehet a kutatások és az iskolai gyakorlat számára is, hogy egy realisztikus feladat ne csupán egy hétköznapi szituációba burkolt aritmetikai vagy algebrai feladat legyen, hanem a feladat életszerű megoldásához a valóság egyes elemeit: jelenségeit, szabályszerűségeit is figyelembe kelljen vennünk. Ezen elemek a figyelembe vétele megjelenhet a feladat egészével kapcsolatos döntésben (pl. nem megoldható, nem értelmes a feladat), a feladat megoldásaként elvárt válasz jellegének meghatározásában (pl. nincs értelme 12,5 buszról beszélni), vagy a feladatmegoldás folyamatának bármelyik pontján. A valóság figyelembe vétele egyrészt gondolkodásunk magasabb szintű komponenseinek felhasználását jelenti, másrészt a feladattal kapcsolatos kontextuális jellemzők adekvát kezelését. E két követelmény gyakran együtt jelentkezik (*Csíkos*, 2001). A tanulmány további részében ezeket szétválasztjuk, és először a metakogníció szerepét, majd a feladat-kontextus jelentőségét tapasztaljuk.

## Metakogníció

*Verschaffel* és mtsai (1999) fejlesztő programjukban a matematikai gondolkodás metakognitív stratégiáinak fejlesztését tűzték ki célul. A matematikai gondolkodás automatizálódott komponenseinek tervezését, nyomon követését és kontrollját biztosító metakognitív stratégiák olyan feladatok esetén is hatékonyan felhasználásra kerülnek, amikor megszokott, sokszor gyakorolt feladattípusról van szó. A feladatmegoldás folyamatának tervezését jelenti, ha a feladat szövegét elolvasva úgy dönt a tanuló, hogy a szövegben szereplő számadatokkal végez összeadást, és a kapott szám lesz a helyes végeredmény. A problémát abban látjuk, hogy a legtöbb alsó tagozatos iskolai szöveges feladat ilyen stratégia alkalmazásával megoldható. Ha bővítjük a metakognitív stratégiák repertoárját, akkor a megszokott, drill jellegű feladatok megoldása továbbra is elérhető, de emellett lehetőség nyílik más típusú, az életszerűség kritériumának jobban megfelelő feladatok megoldására is. A nemzetközi szakirodalomban egyre szélesebb körű vizsgálatok folynak a metakogníció tanításban, tanulásban betöltött szerepéről. A hazai szakirodalom a kilencvenes évektől használja a metakogníció terminológiát a saját tudásra vonatkozó tervezési, nyomon követési és ellenőrzési folyamatok jelölésére.

## A matematikai feladatok kontextusa

A kontextus fogalmát nem egységesen használja a szakirodalom. Kognitív feladatokkal kapcsolatban a kontextus gyakran a feladat tartalmaként szerepel. Gyakori az olyan értelmezés, amelyben a feladat kontextusa alatt a feladat tartalmi összetevőit értik. Ebben az értelmezésben hallhatjuk, hogy a tanulók nem képesek egy matematikai képlet felhasználására, ha az adott feladat fizika- vagy kémiaórán kerül elő. A legtöbb tanulmányban, amely a kontextuális hatásokkal foglalkozik, rejtve marad, hogy a szerző mit ért pontosan „kontextus” alatt *Butterworth* (1993). Az implicit értelmezések ugyanakkor igen széles skálán mozognak. A következőkben egy olyan kontextus-értelmezést alkalmazunk, amely a sokféle implicit definíció lényeges jegyeit ötvözi.

A kontextus meghatározásában legtöbbször a kulturális és szociális tényezők kapnak szerepet. A kultúra szerepének elemzésében központi helyet kap a nyelvi tényezők vizsgálata, mivel a kultúra átvitelében a nyelvnek meghatározó szerepe van. *Mercer* (1993) nyelvészeti szemszögből úgy véli, hogy legtágabb értelemben a kontextus egy adott kijelentéshez kapcsolódó relevánsnak vélt külső tulajdonságok halmazát jelenti, amely külső tényezők befolyásolják egy kijelentés nyelvi analízisét. A nyelv ugyanakkor konkrét fizikai megjelenési formákhoz köthető. Ezért nagyon fontos a kontextus értelmezésében a figyelem jelentőségét, továbbá az intra- és interperszonális aspektusokat egyaránt kiemelni (*Butterworth*, 1993; *Roazzi* és *Bryant*, 1993). Számos olyan nemzetközi (japán, flamand, ír és német) vizsgálatot ismerünk (*Verschaffel*, *Greer* és *De Corte*, 2000), amelyekben kísérletet tettek a diákok realisztikus válaszainak növelésére a papír-ceruza tesztelés keretein belül azáltal, hogy a feladatmegoldás kontextusát változtatták. Ezek, a papír ceruza tesztelés keretein belül maradó kontextus-változtatások lényegében hatástalannak bizonyultak, nem eredményeztek jelentős növekedést a diákok realisztikus reakciói terén. Ilyen kontextusváltoztatás a tesztlap elején egy arra vonatkozó figyelmeztetés, hogy a feladatok között lehetnek becsapós feladatok, vagy olyanok, amelyeknek nincs megoldása. A tesztlap címének változtatásával: „Matematika teszt", „Matematikai rejtvények", „Becsléses feladatok" sem sikerült szignifikáns javulást eredményezni a realisztikus válaszok terén. Más esetben a kísérletvezető szóban hívta fel a diákok figyelmét a lehetséges buktatókra, de ez a módszer sem bizonyult sikeresnek a megoldás hatékonyságának a szempontjából.

### Kutatási cél, hipotézis

Kutatásunkban 5. osztályos diákok realisztikus meggondolásait és metakognitív stratégiáit vizsgáltuk matematikai szöveges feladat megoldása közben, interjú és hangosan gondolkodtatás (*think-aloud*) módszerével. Feltételezésünk az volt, hogy az alkalmazott interjú helyzet mint feladatkontextus elősegíti a realisztikus meggondolások megjelenését, és lehetővé teszi a metakognitív stratégiák megfigyelését. A hangosan gondolkodtatás közben arra kérjük a problémamegoldót, hogy a problémamegoldás közben próbálja tudatosan követni gondolatait, és a feladattal kapcsolatos gondolatairól – melyek például a tervezésre, a tanácstalanságra, a feladat elemzésére, konkrét számolások elvégzésére, vagy az eredmény ellenőrzésére vonatkoznak – folyamatosan számoljon be, mondja ki hangosan őket. A metakognitív stratégiák online vizsgálatára ez egy alkalmas és elterjedten használt módszer (*Veenman* és *Hout-Wolters*, 2003). Az interjúk videofelvételre rögzítésével lehetőség nyílt a megfigyelhető tanulói viselkedések utólagos leírására, ezáltal pedig az adatok kvantitatív, kvalitatív elemzésére is.

### Az egy évvel korábbi fejlesztő kísérlet tapasztalatai

2004 tavaszán, az interjúk készítése előtt egy évvel matematika és olvasás terén tartalomba ágyazott metakognitív fejlesztő kísérlet történt több Békés megyei iskola 4. osztályában. A fejlesztő kísérlet *Csíkos Csaba* vezetésével zajlott, és annak jellemzőit és eredményeit több fórumon bemutattuk (*Csíkos*, 2005a, 2005b, 2005c). Az egytényezős kísérlet célja a matematika és olvasás terén alkalmazható metakognitív stratégiák megismertetése, használatuk elősegítése volt. Nem a metakogníció fejlesztése, hanem a metakognitív stratégiákon keresztül a tanulói teljesítmény növelése volt a cél. A fejlesztő kísérlet a minimális beavatkozás koncepciót követte: 15 matematika- és 15 olvasásóra második felét használta fel. A program négy specifikus matematikai metakognitív stratégiát: az eredmény értelmezése, a hétköznapi tudás felhasználása, a megoldás megtervezése, a megoldási folyamat értékelése és hibakutatás, valamint három olvasási stratégiát nevez meg: szöveg anticipáció, szövegkezelés, javító stratégiák. Egy-egy stratégia előmozdítására a fejlesztő program kettő-hat alkalmat szánt. Az empirikus eredmények elemzése azt mutatja, hogy az utóteszteken, melyek egy hagyományos matematika tesztből, 10 „problematikus” matematikai szöveges feladatot tartalmazó tesztből, egy hagyományos olvasástesztből és egy dokumentum szövegeket tartalmazó tesztből álltak, szignifikáns különbség mutatkozott a kísérleti és a kontroll csoport teljesítményei között. A tanulmányban bemutatásra kerülő interjú módszerrel lezajlott mérés a fent említett fejlesztő kísérlet egy évvel követő késleltetett utótesztjének tekinthető.

## Minta

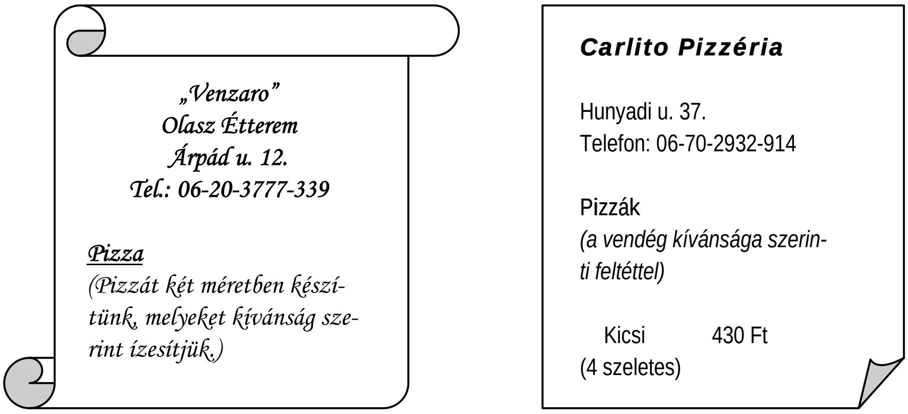
A kísérletben 20 Békés megyei 5. osztályos általános iskolai tanuló vett részt. Közülük tízen az egy évvel korábbi fejlesztő program egyik kísérleti osztályából valók, tízen egy másik iskola kontrollcsoportjából kerültek ki. A két osztályból véletlenszerűen választottuk ki a tíz-tíz diákot. Két interjú értékelése technikai okból nem lehetett teljes, így 18 feldolgozott interjúval dolgoztunk.

Az interjúk felvételére 2005. júniusában tanórai kereteken kívül, de az iskolán belül maradva került sor. A diákokat egyesével szólítottuk az akciószobába oly módon, hogy az interjún túl lévők és az interjú előtt állók között ne nyíljon lehetőség a kommunikációra. Az akciószobában az interjú alatt a diákon és az interjúkészítőn kívül más nem volt jelen.

## A feladat

Az interjú a hangosan gondolkodásra való felkészítéssel kezdődött. Az interjúkészítő elmagyarázta a tanulónak, hogy a kísérlet elsősorban nem azt vizsgálja, hogy mennyire ügyesen oldja meg a feladatot, hanem az a célja, hogy minél több információt gyűjtsünk arról, hogy mikor mire gondol a feladat megoldása közben. Miután a kísérletvezető pár példamondattal illusztrálta a hangosan gondolkodást, arra kérte a résztvevőt, hogy a feladat megoldása közben folyamatosan számoljon be lehetőleg minden gondolatáról. Az interjú alatt a diákok egy realisztikus matematikai szöveges problémát oldottak meg, mely *Kramarski, Mevarech* és *Lieberman* (2001) 7. osztályosok körében használt pizzafeladatának egyszerűsített adaptációja volt (lásd 1. ábra).

> „Az osztály osztálybulit szervez. Az üdítőkről az iskola gondoskodik, az ennivaló megszervezése az osztály feladata. A te feladatod a pizzák megrendelése. Az osztálypénzből erre 5000 Forint fordítható, amin minél több pizzát kellene rendelni. Itt láthatod két helyi pizzériának az étlapját és az árait. Hasonlítsd össze az árakat, válaszd ki a legkedvezőbbet, telefonon hívd fel a választott pizzériát és rendeld meg a pizzákat!”




*1. ábra*
*Az interjú során használt realisztikus matematika feladat*

A feladat szövegét és a két étlapot a diákok egy A3-as lapra nyomtatva kapták meg. Az A3-as méretet azért használtuk, hogy a videón is lehessen követni, hogy a diák mikor melyik területre néz, mivel foglalkozik.

A feladat megoldására körülbelül 10 perc állt rendelkezésre. Ezt nem tekintettük szigorú időkorlátnak, de sok esetben azt eredményezte, hogy ha a diák elakadt a problémamegoldás valamely szakaszában, akkor az interjúkészítő segítő kérdésekkel, együttszámolással próbálta a megoldás menetét továbblendíteni. Az adatfelvételi útmutatóban két segítségadási lehetőséget rögzítettünk, melyeket az interjúkészítő abban az esetben alkalmazott, ha a diák a feladathoz hozzá sem tudott kezdeni. Az első segítség arra vonatkozott, hogy az életben általában „mi éri meg jobban", otthoni fogyasztásra az emberek (a diák családja) általában inkább kétliteres, vagy félliteres üdítőket vásárol, és vajon mi ennek az oka. A második segítségadási lépésre akkor volt szükség, ha az első segítségadással nem sikerült a diák problémamegoldását elindítani. Ez már a feladathoz direktebb módon kapcsolódott: a két étterem által kínált pizzák méretük és áruk alapján történő összehasonlítására vonatkozó kérdésekből állt. Minden diák azután hagyta el az akciószobát, ha adott egy általa jónak ítélt megoldást a feladatra.

**Vizsgált változók**

Az interjúk kvantitatív elemzése *Schoenfeld* 1987-ben publikált kutatásán alapszik, ahol a kutatás vezetője egyetemi hallgatók és matematikusok probléma-megoldási stratégiáit vizsgálta oly módón, hogy a probléma-megoldási folyamatról készített videofelvételek alapján félpercenként meghatározta a problémamegoldó által alkalmazott stratégiák közül a dominánst. A vizsgált stratégia kategóriák a következők voltak: 1. olvasás (*reading*), 2. elemzés (*analyzing*), 3. útkeresés (*exploring*), 4. tervezés (*planning*), 5. kivitelezés (*implying*), 6. ellenőrzés (*verifying*).

Kutatásunkban változtattunk a *Schoenfeld*, (1997) által kidolgozott módszertani rendszeren. Az interjúk során 15 mp-es intervallumonként regisztráltuk a domináns viselkedéskategóriát, továbbá elhagytuk a 6. ellenőrzés kategóriát, mert az alkalmazott probléma, a vizsgált szituáció nem adott teret az eredmény ellenőrzésére, és helyét a „megoldásadás" kategória töltötte ki. Az interjú módszere elengedhetetlenné teszi a problémamegoldó és a kísérletvezető kommunikációját, ezért bevezettünk egy új kategóriát, mellyel azt jelöltük, ha a feladatmegoldáshoz nem kapcsolódó tevékenység zajlott (pl. az interjúkészítő beszél, felvezeti a feladatot, vagy a diák a feladathoz nem kapcsolódó, esetleg a meghatározott kategóriák szerint értékelhetetlen tevékenységet mutat).

Az interjúk elemzéséhez további hat változót definiáltunk, melyek a realisztikus gondolkodáshoz, vagy a kognitív teljesítményhez köthetők: (1) A feladat elolvasása során felolvassa-e az étlapon szereplő telefonszámokat? – A telefonszámok a probléma megoldása szempontjából irrelevánsak. (2) Kerekíti-e az étlapon szerelő árakat? – A pizzák árai valós árakhoz hasonlóan 9-re, vagy 99-re végződtek, pl. 399 Ft, 899 Ft. (3) Érti-e azt, hogy „megéri"? (4) Telefonál-e? – A feladat megoldása után az interjúkészítő megkérdezte a diákot, hogy biztos-e a megoldásában olyannyira, hogy akár fel is hívná a pizzériát. A legtöbben igennel válaszoltak. Ez esetben egy mobiltelefont adott a diák kezébe és arra kérte őt, hogy hívja fel a pizzériát, rendelje meg a pizzákat. A diákok túlnyomó többsége ebben a valóságközeli szituációban megváltoztatta a véleményét, és azt mondta, hogy nem telefonál. (5) Hány szelet pizzát rendel? – Ez a változó mutatja, hogy a diák mennyire sikeresen oldotta meg a problémát, hiszen az volt a feladat, hogy minél nagyobb mennyiségű pizzát rendeljen. (6) A tanulók tavaly év végi matematika osztályzata, melyet utólag kértünk el az iskoláktól.

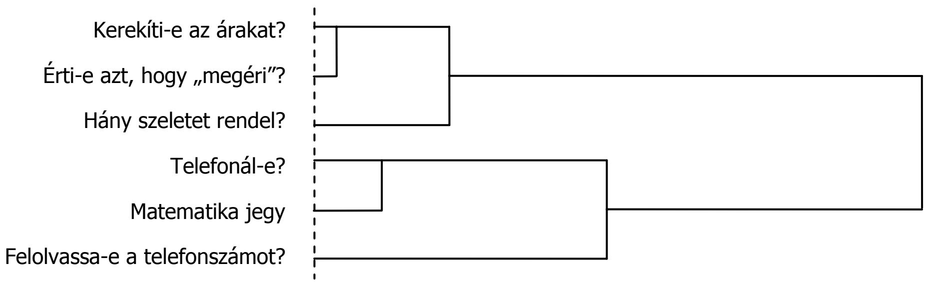
Kvalitatív elemzésünkben a megjelenő realisztikus elemekre fókuszáltunk, illetve azt vizsgáltuk, hogyan realizálódik a feladat és a valóság világa.

## Eredmények

A videók kvantitatív elemzéseként először az interjúk alatt 15 másodpercenként meghatározott domináns, megfigyelhető tevékenységek adatait vizsgáltuk aszerint, hogy a kísérleti és a kontrollcsoport diákjainak metakognitív stratégiá között kimutatható-e különbség. A hat kategóriát (olvasás, elemzés, útkeresés, tervezés, kivitelezés, megoldásadás) két csoportba foglaltuk aszerint, hogy a tevékenység hátterében feltételezhetően jelen voltak-e metakognitív stratégiák. A metakognitív stratégiákat feltételező első tömbbe az elemzés, a tervezés és a megoldásadás kategóriákat soroltuk. A probléma elemzése jellemzően meta-szintű tevékenység, azaz nem az algoritmikus feladatmegoldás szintjén van jelen. A tervezés a legtöbbet emlegetett metakognitív stratégia. Ez a tevékenység nem jelenhet meg metakogníció nélkül, hiszen a problémamegoldó a saját problémamegoldási folyamatáról gondolkodik előre. A megoldásadás kategória azért került a metakognitív csoportba, mert magában foglalja a megoldás értelmezését, indoklását is, amelyek feltételezik a problémamegoldás folyamatára való visszatekintést. A metakogníciót nem feltételező kategóriákat tömörítő második tömbbe az olvasás, az útkeresés és a kivitelezés kategóriákat soroltuk. Az olvasás sok metakognitív stratégiát mozgósít, de ezeket ebben a kísérletben nem vizsgáltuk, az olvasást, mint automatikus tevékenységet kezeltük. Az útkeresés kategória általában a tanácstalanságot, a próbálgatást fedi, vagyis a meta-szintű elemzés által felderített lehetőségek kipróbálását jelenti, amihez már nem szükséges metakognitív stratégia. A kivitelezés a műveletek algoritmikus-szintű egymás utáni elvégzése.

Minden tanuló esetében meghatároztuk, hogy mennyi az egyes tevékenység-kategóriákra fordított relatív idő, azaz a feladattal való foglalkozás egészének hány százalékát tette ki az adott tevékenység. Ezután azt vizsgáltuk, hogy a kísérleti és a kontrollcsoportokból származó diákoknak a metakogníciót feltételező, és a metakogníciót nem feltételező tevékenységekre fordított relatív idejük között mutatkozik-e lényeges különbség. Az eredmények azt mutatják, hogy igen. A kísérleti csoport diákjai a feladatmegoldás idejének átlagosan 56%-át töltötték az elemzés, a tervezés, a megoldásadás tevékenységekkel, és az idejüknek csak 44%-ában foglalkoztak az olvasás, az útkeresés, vagy a kivitelezés valamelyikével. A kontrollcsoportról épp az ellenkezője mondható el: átlagosan az idejüknek csak 43%-át fordították a metakogníciót feltételező tevékenységekre, és az idejük 57%-ában metakogníciót nem feltételező, algoritmikus jellegű tevékenységet mutattak. A két tanulócsoportnak a kétféle tevékenységekre fordított idő átlagos értékei közti különbségek jelentősek, ezt kétmintás t-próbával ellenőriztük ($t=3{,}75$, $p=0{,}02$). A fejlesztés után egy év elteltével is kimutatható volt lényeges különbség abban, hogy a problémamegoldás alatt a kísérleti csoportból való diákok több időt fordítottak metakognitív alapokon nyugvó tevékenységekre, mint algoritmikus tevékenységekre, és ez a különbség a kontroll csoport diákjaira általában nem mondható el.

Az interjúk elemzése folyamán definiált változókat és az előző év végi matematika osztályzat, mint változó közötti összefüggéseket a legtávolabbi szomszéd módszerét alkalmazó klaszteranalízissel vizsgáltuk. Az 1. ábra a klaszteranalízis eredményét szemléltető fagráfot mutatja.

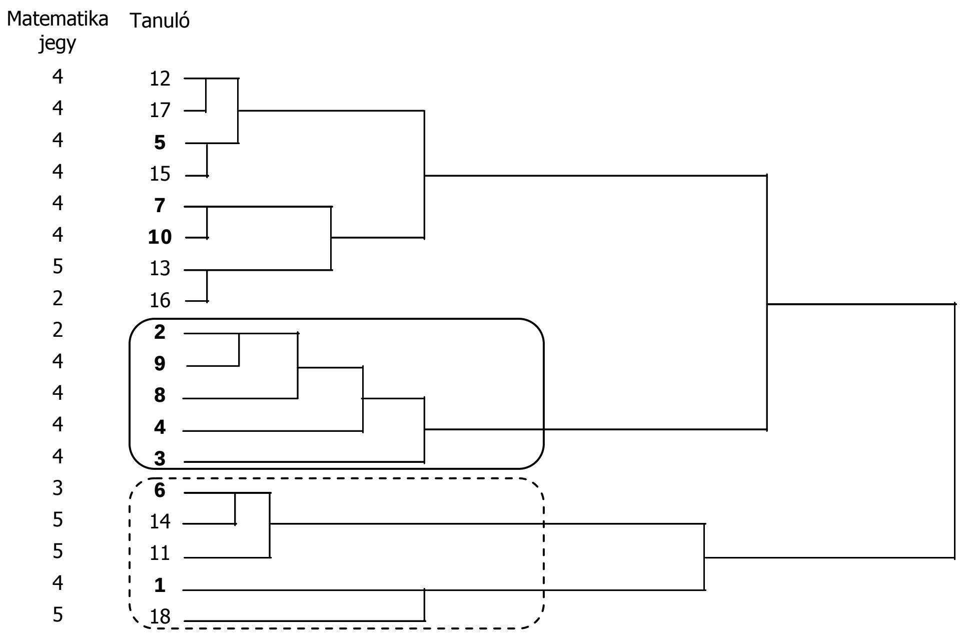



*1. ábra*
*A változók klaszteranalízisének dendogramja*

Az összefüggések két kapcsolódás létrejöttéig szignifikánsak. A matematika jegy a „Telefonál-e?" változóval mutat szoros kapcsolatot. Ennek az lehet a magyarázata, hogy mindkét változó hátterében nagy teret kap az életrevalóság, a bátorság, valamint az érvényesüléshez szükséges szociális tulajdonságok.

A nem szignifikáns kapcsolatokat is figyelembe véve egy affektív és egy kognitív változókat tömörítő klaszter alakult ki. A matematika jegy az affektív jellegű változókkal mutat szorosabb kapcsolatot.

A tevékenységkategóriák alapján a tanulókra elvégzett klaszteranalízis dendogramja látható a 2. ábrán. Ez esetben jóval több kapcsolat mutat szignifikáns összefüggést, csupán az utolsó három kapcsolódás nem szignifikáns.

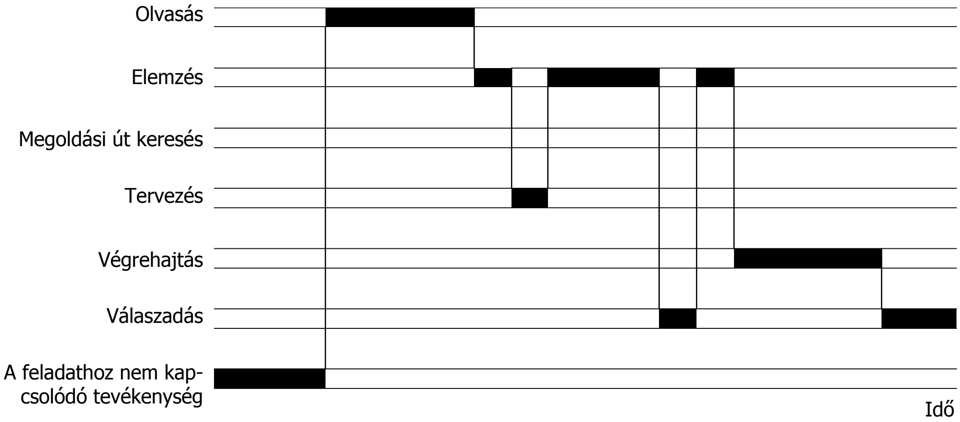



*2. ábra*
*A tanulók klaszteranalízisének dendogramja*

A vastag sorszámmal szedett tanulók a kísérleti osztályból valók. A tanulók számjelei mellett az előző évi matematika osztályzatukat tüntettük fel. A kísérleti csoport tagjai egy fürtbe rendeződnek (folytonos vonalú négyszög), illetve említésre méltó még az a klaszter, ahol a gyengébb kísérleti csoport diákjai állnak össze a kontroll csoport jeles osztályzattal rendelkező tagjaival (szaggatott vonalú négyszög). A további elemzések során e két fürtre koncentrálnak.

A tanulók *Schoenfeld*-féle viselkedésmintázataival jól érzékeltethető a két csoport közti különbség, amit egy-egy, a klaszterre jellemző viselkedésmintázat bemutatásával szemléltetünk.

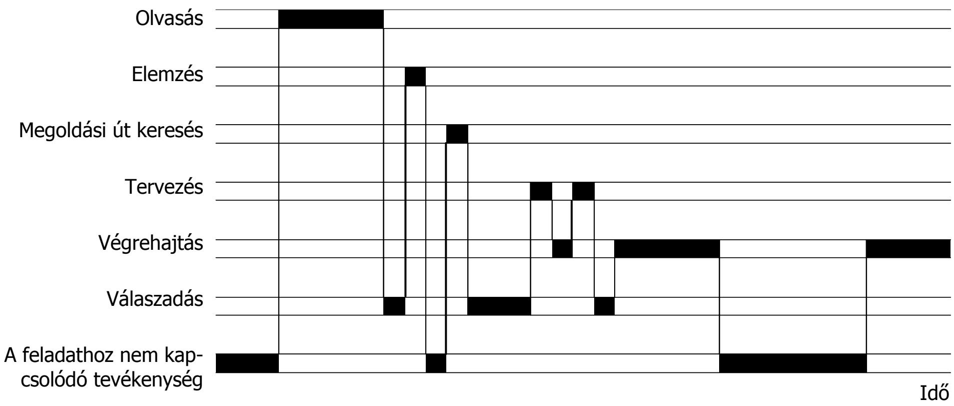
A 2. ábrán folytonos vonalú négyszöggel jelzett fürtre (kísérleti csoport tagjai) a 3. ábrán mutatott mintázat jellemző.




*3. ábra*
*A folytonos vonallal keretezett klaszter diákjaira jellemző Schoenfeld-féle viselkedésmintázat*

A 3. ábra vízszintes tengelye az időt jelenti, a vízszintes sávok pedig a viselkedés-, illetve stratégiakategóriákat jelentik. A diákok a feladat elolvasása után több percig tartó elemzésbe és tervezésbe kezdtek, majd csak ezután tértek rá a válaszadásra. Mivel a probléma nem egy kizárólagosan jó válaszlehetőséggel bír, ezért valószínű, hogy a válaszadást újabb elemzés, végrehajtás, majd újabb válaszadás követte.

Ilyen típusú mintázatokat kapott *Schoenfeld* a szakértők elemzésekor, ahol az elemzés és a tervezés kapott hangsúlyt, és a viszonylag késői válaszadás volt a jellemző.




*4. ábra*
*A szaggatott vonallal keretezett klaszter diákjaira jellemző Schoenfeld-féle viselkedésmintázat*

A szaggatott vonallal körülhatárolt fürtbe tartozók esetében ez másképpen alakul. Ezt a mintázatot, melyet nevezhetünk az azonnal válaszadásra törekvő tevékenységnek, a 4. ábra mutatja.

Ebben az esetben az elemzés és a tervezés fázisai teljes mértékben kimaradtak, a feladat elolvasása után rögtön a válaszadás következett, majd a végrehajtás, a kivitelezés, azaz a számolás vált dominánssá.

Az interjúk kvalitatív elemzése az interjúk anyagában rejlő, de a kvantitatív változókkal nehezebben megragadható információkra fókuszált. Az interjúk és a hangosan gondolkodtatás eredményeiből arra következtethetünk, hogy egy realisztikus matematikai szöveges feladat megoldása közben a diákok gondolatai között – az eddig papír-ceruza tesztekkel mért eredményekkel ellentétben – igen gyakran jelennek meg realisztikus elemek. Feltételezésünk szerint ezen realisztikus meggondolások kimutatására nem alkalmas a papír-ceruza teszt, illetve előfordulhat, hogy a papír-ceruza teszt megoldása során ezen realisztikus meggondolások figyelembe vétele inkább hátrányt jelent. A következő két szövegrészben erre a jelenségre mutatunk példát. Alex az idézett beszélgetés-részletben éppen arra keresi a választ, hogy a két pizzéria közül melyikből lenne érdemes rendelni.

*Alex: Én inkább a Carlito pizzériára tippelnék…*
*Kísérletvezető: Látom, hogy jár a szemed, nézed mind a két étlapot. Mit nézel rajtuk?*
*Alex: Hogy melyik étterem van közelebb.*
*Kísérletvezető: Az iskolához?*
*Alex: Igen, az Árpád utcai vagy a Hunyadi utcai.*
*Kísérletvezető: És tudod hol van ez a két utca?*
*Alex: Nem tudom.*

Alex az alapján akart pizzériát választani, hogy melyik van közelebb az iskolához. Feltételezhetjük, hogy ha Alex tudta volna, hogy melyik cím a közelebbi, és döntését eszerint hozta volna meg – ami a valóságban egy jó, racionális döntésnek minősíthető – és ez a pizzéria nem az, ami épp olcsóbb, akkor a papír-ceruza teszt értékelésekor csak a helytelen választ láthatnánk, a háttérben húzódó racionális indokot, gondolkodást nem.

Dorka szintén egy olyan realisztikus meggondolásról számol be, amely a feladat matematikai értelemben való helyes megoldásában gátolta őt. „*Inkább a drágábbat választanám, mert lehet hogy az akkor finomabb is.*"

Dorka vélekedése a valóságban egy elfogadható érv lehet, de a papír-ceruza teszten való megoldása alapján azt gondolhatnánk, hogy Dorka nem tudta helyesen megítélni, hogy melyik pizzéria az olcsóbb, hiszen csak azt látnánk, hogy matematikailag épp a „rossz" pizzériát választotta.

A két következő részlettel arra szeretnénk példát mutatni, amikor a diákok a matematikai feladat és a valóság világának határára kerülnek, adott esetben váltanak a két világ között, ismerve mindkét világ szabályszerűségeit.

Az első eset szereplője Zsanett, aki miután kiválasztotta a pizzériát és a rendelendő pizza méretét is, azt számolja, hogy 5000 Ft-ból hány darabot tud rendelni. 8 darab pizza 5040 Ft-ba kerül. Amikor a kísérletvezető arról kérdezi, hogy ez a 40 Ft problémát jelent-e a matematika világában és problémát jelent-e a valóságban, a beszélgetés a következőképpen alakul:

*Zsanett: 4440, és itt kell megállni, mert ha hozzáadok 600-at az már 5040.*
*Kísérletvezető: És az baj?*
*Zsanett: Igen, mivel csak 5000 Forint költhető.*
*Kísérletvezető: És akkor mennyivel mennél tovább rajta?*
*Zsanett: 40 Forinttal.*
*Kísérletvezető: És probléma az a 40 Ft?*
*Zsanett: Nem probléma, de kiszabták, hogy csak 5000 Forintot lehet költeni. Itt a feladat azt írja, hogy 5000 Forint.*
*Kísérletvezető: És a valóságban ez hogy működne?*
*Zsanett: A valóságban hozzáraknánk 40 Forintot.*
*Kísérletvezető: De ez nem a valóság?*
*Zsanett: Igen, itt a feladat azt írja, hogy nem plusz 40 Forint, hanem simán 5000.*
*Kísérletvezető: De a valóságban ez nem így van…*
*Zsanett: Igen.*

Amikor egy diák befejezte a feladat megoldását, a kísérletvezető minden esetben megkérdezte tőle, hogy biztos-e olyannyira a megoldásában, hogy akár fel is hívná a pizzériát. A következő idézetben példát láthatunk arra a viselkedésre, amit a legtöbben mutattak: Kitti határozottan állítja, hogy ő felhívná a pizzériát, de akárcsak több társa, amikor a kezébe kap egy mobiltelefont, eláll a szándékától.

*Kísérletvezető: Biztos vagy a megoldásodban annyira, hogy akár fel is hívnád a pizzériát? Ugye az van a feladatban, hogy a választott pizzériát hívd fel.*
*Kitti: Igen, én felhívnám.*
*Kísérletvezető: Felhívnád?*
*Kitti: Igen. Igen, én felhívom!.*
*Kísérletvezető: Akkor adom a telefont [a kísérletvezető nyújtja neki a telefont]*
*Kitti: …*
*Kísérletvezető: Mi a baj, Kitti?*
*Kitti: Hát én nem merem felhívni!*

Több olyan aspektusa is lehet a fent leírt telefonos szituációnak, melyek zavarba ejthetik, frusztrálhatják a kísérletben résztvevő diákot, és arra késztethetik őt, hogy ne telefonáljon. Ilyen kérdések lehetnek például, hogy ki fogja kifizetni a pizzákat, kik fogják megenni a pizzákat, hogy nem beszélték meg ezt az osztálybulit, vagy hogy ki fizeti a hívást. Ezen kívül belső tényezők is szólhatnak a telefonálás ellen: még soha nem rendelt pizzát, telefonon nem szívesen beszél idegenekkel, felnőttekkel, stb. Ezek a körülményből fakadó dilemmák, nehézségek arra késztetnek egy ötödik osztályos diákot, hogy inkább ne hívja fel a feladatban szereplő pizzériát. A számunkra fontos kérdés inkább az lehet, hogy miért nem jelentek meg ezek a tényezők hamarabb. Amikor a kísérletvezető a mobiltelefon elővétele előtt megkérdezte a diákokat, hogy felhívják-e a pizzériát, 18 főből 16-an határozott igennel válaszoltak. Úgy tűnik tehát, hogy ezt a döntésüket nem befolyásolták a fent leírt frusztráló körülmények, csupán az, hogy a feladatmegoldásukat matematikai értelemben mennyire ítélték helyesnek. A 16 igennel válaszoló diák közül mikor a kísérletvezető telefonálásra kérte őket, csupán három diák volt hajlandó telefonálni. Tehát miután élessé, reálissá vált a helyzet, tényleges telefonálásra került sor, azaz a matematika feladat világából átléptünk a valóságba, megváltoztak a döntést meghatározó szempontok: a megoldás matematikai értelemben vett jósága helyett a telefonálással kapcsolatos tényezők váltak dominánssá. Mindebből azt láthatjuk, hogy a diákok nagy többsége tisztában van mind a matematika feladatok világának, mind a valós világnak a szabályaival, akárcsak a döntéshelyzetekben alkalmazható szempontokkal. Ezt a két világot viszont éles határ választja el, ezt bizonyítja a diákok zavara, frusztrációja, amit egyrészt akkor mutatnak, ha bizonytalanná válnak, hogy melyik világban kell mozogniuk, másrészt akkor, ha a két világ közti határ átlépésére kérik őket.

## Összefoglalás

Az alapvető kogníciós folyamatokhoz rendeződött kultúrtechnikák – mint az olvasás, írás, számolás képessége – akkor szolgálja az egyén mindennapi boldogulását jelentős mértékben, ha az a hétköznapi problémák megoldására is alkalmassá teszi használóját. A funkcionális illiteráció felismerésének már az első évtizedében születtek olyan definíciók, amelyek magát a jelenséget az előbb említett három kultúrtechnika segítségével definiálják: *„Funkcionálisan írástudó az a személy, aki gyakorolni képes azokat a tevékenységeket, amelyekben az írásbeliségnek fontos szerepe van az adott csoportban és közösségben, valamint képes arra is, hogy az olvasás, írás, számolás segítségével előmozdítsa saját, illetve a közössége fejlődését.*”[1] (*Gray*, 1956. 4. o.)

Az oktatásban alkalmazott valós élethelyzetekre vonatkozó matematika feladatok nagy valószínűséggel hozzájárulhatnának az iskolarendszer azon diszfunkciójának háttérbe szorításához, felszámolásához, amely nemcsak a társadalmi igényeknek irányában realizálódó nem megfelelést jelent, hanem esélyegyenlőtlenséget eredményez sokak számára (*Andor* és *Liskó*, 2000).

Dolgozatunkban olyan tényezőkre hívjuk fel a figyelmet, amelyek a fent említett reális élethelyzethez közelítenék az iskolai gyakorlatot. Fontos ilyen tényezőnek tartjuk a realisztikus matematika feladatok alkalmazásán kívül a metakognitív folyamatok, valamint a kontextus figyelembevételét.

Ilyen szempontból fontos tapasztalatunk még, hogy a *Shoenfeld*-féle videoelemzés eredményei azt bizonyították, hogy azok a gyerekek, akik az egy évvel ezelőtti, metakognícióra alapuló kísérleti csoport munkájában részt vettek, szignifikánsan több időt fordítottak a jellemzően metakognitív folyamatokat igénylő tevékenységekre. Úgy tapasztaltuk továbbá, hogy az elemzés és a tervezés fázisának a hosszúsága hatással van

[1] „A person is functionally literate who can engage in all those activities in which literacy is required for effective functioning of his group and community and also for enabling him to continue to use reading, writing and calculation for his own and the community's development."

az eredményességre. A *think-aloud* módszer lehetővé tette, hogy megfigyeljük a reális elemek megjelenését is a matematikai példában, ezzel kapcsolatban fontos megjegyeznünk, hogy minden bizonnyal ezek az elemek megjelennek az iskolai órákon is.

A fentiekben felsorolt tények további gyakorlati vonatkozású következtetést is indokolttá tesznek: Ha az oktatásban a matematikai feladatok szemlélete a valós, mindennapokban előforduló szituációk és az iskolai feladatok világának az azonosságát sugallja, támogatja, akkor az iskolán kívüli világban a gyerekek magabiztosabban és bátrabban fogják alkalmazni az erre irányuló tudásukat.

## Irodalom

Andor Mihály és Liskó Ilona (2000): *Iskolaválasztás és mobilitás*. Iskolakultúra-Könyvek, Pécs.

Butterworth (1993): Context and cognition in models of cognitive growth. In: Light, P. és Butterworth, G. (szerk.): *Context and cognition*. Erlbaum, Hillsdale, NJ. 1–13.

Csíkos Csaba (2001): *Kontextus és metakogníció a kognitív feladatok megoldásának folyamatában*. Előadás az 1. Országos Neveléstudományi Konferencián, Budapest, 2001. október 25–27.

Csíkos Csaba (2003): Egy hazai matematika felmérés eredményei nemzetközi összehasonlításban. *Iskolakultúra*, 8. sz. 20–27.

Csíkos Csaba (2005a): *A metacogniton-based training program in grade 4 in the fields of mathematics and reading*. Paper presented at the 11th European Conference for Research on Learning and Instruction, Nicosia, Cyprus, 23–27, August, 2005.

Csíkos Csaba (2005b): *Metakognícióra alapozott fejlesztő tréning 4. osztályban a matematika és az olvasás területén*. Előadás az 5. Országos Neveléstudományi Konferencián, Budapest, 2005. október 6–8.

Csíkos Csaba (2005c): Metakognícióra alapozott fejlesztő kísérlet 4. osztályos tanulók körében a matematika és az olvasás területén. *Magyar Pedagógia.* (közlésre benyújtott kézirat)

Gray, W.S. (1956): *The teaching of reading and writing*. UNESCO, Párizs.

Greer, B. (1997): Modelling reality in classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, **7**. 293–307.

Józsa Krisztián és Székely Györgyi (2004): Kísérlet a kooperatív tanulás alkalmazására a matematika tanítása során. *Magyar Pedagógia*, 3. sz. 339–362.

Kelemen Rita (2004): Egyes háttérváltozók szerepe „szokatlan" matematikai szöveges feladatok megoldásában. *Iskolakultúra*, 11. sz. 28–38.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R. és Lieberman, A. (2001): Effects of multilevel versus unilevel metacognitive training on mathematical reasoning. *The Journal of Educational Research*, **94**. 292–300.

Mercer, N. (1993): Culture, context and the construction of knowledge. In: Light, P. és Butterworth, G. (szerk.): *Context and cognition*. Erlbaum, Hillsdale, NJ. 28–46.

Molnár Gyöngyvér (2002): Komplex problémamegoldás vizsgálata 9-17 évesek körében. *Magyar Pedagógia*, **102.** 231–264.

NAT (1995). *Nemzeti Alaptanterv*. Művelődési és Közoktatási Minisztérium, Budapest.

Reusser, K. és Stebler, R. (1997): Every word problem has a solution – the social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, **7**. 309–327.

Roazzi, A. és Bryant, P. (1993): Social class, context and development. In: Light, P. és Butterwoth, G. (szerk.): *Context and cognition*. Erlbaum, Hissldale: NJ. 14–27.

Schoenfeld, A. H. (1987): What's all the fuss about metacognition? In: Schoenfeld, A. H. (szerk.): *Cognitive science and mathematics education*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey – London. 189–215.

Veenman, M. V. J. és van Hout-Wolters, B. H. A. M. (2003): The assessment of metacognitive skills. What can be learned from multi-method designs? Paper presented at the 10th Biennial Conference for Research on Learning and Instruction, Padova, Italy.

Verschaffel, L. és mtsai (1999): Design and evaluation of a learning environment for mathematical modeling and problem solving in upper elementary school children. *Mathematical Thinking and Learning*, **1**. 195–229.

Verschaffel, L., Greer, B. és De Corte, E. (2000): *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger, Lisse etc.

Wyndhamn, J. és Säljö, R. (1997): A szöveges feladatok és a matematikai megértés. *Iskolakultúra*, 12. sz. 30–46.

# ABSTRACT

RITA KELEMEN, CSABA CSÍKOS AND STEKLÁCS JÁNOS: METACOGNITIVE STRATEGIES IN MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING: EVIDENCE FROM THINK-ALOUD PROTOCOLS AND VIDEOTAPED SESSIONS

Both in international and national declarations, one of the most important aims of school mathematics is to enable students to solve real-life mathematical problems. In recent years, several studies focused on the questions of how students use (or neglect) their everyday knowledge and experience when solving mathematical word problems in school context. These studies provided evidence related to students' strong tendencies to exclude their real-world knowledge and realistic considerations from their mathematical word problem solving processes. The purpose of the present study is to use interviews and think-aloud protocols to analyze and describe children's problems solving behaviour patterns. The participants were twenty fifth grade students from two schools of Békés County, Hungary. One half of the sample was randomly selected from a group previously involved in metacognition-based training in the fields of mathematics and reading, and the other half was randomly selected from their control group.

We examined students' realistic problem-solving processes by videotaping their think-aloud sessions. The word problem used in this investigation was a simplified version of *Kramarski*, *Mevarech* and *Lieberman*'s pizza-task, which required the students to choose and order as many pieces of pizza as possible, from one of two restaurants up to 5000 Forints. Students' observable behaviour was videotaped during a 20 minute long think-aloud interview. We used *Schoenfeld*'s method to represent students' behaviour patterns. The most interesting finding comes from a cluster analysis, in which student groups could be identified. One cluster consists of students who were members of the experimental group the year before, and they proved to be 'good metacognitive strategy users', even though they had below the average marks in maths. On the other hand, some students from the former control group could be classified as 'poor metacognitive strategy users'. Our investigation has married two methodological ways of measuring metacognition. Using think-aloud protocols enabled on-line observation of strategic elements of behaviour, while the post-hoc analysis of videotapes enabled us to quantify observable behaviour patterns.

Magyar Pedagógia, **105**. Number 4. 343–358. (2005)

Levelezési cím / Address for correspondence: Kelemen Rita és Csíkos Csaba, Szegedi Tudományegyetem, H–6722 Szeged, Petőfi S. sgt. 30–34., Steklács János, Kecskeméti Főiskola, H–6000