



## FELSOROLÓ KOMBINATÍV FELADATOK MEGÉRTÉSÉNEK VIZSGÁLATA AZ ELEMSZÁM, AZ ISMÉTLŐDÉS ÉS A FELCSERÉLHETŐSÉG KRITÉRIUMOK ALAPJÁN

**Gál-Szabó Zsófia\* és Korom Erzsébet\*\***

*\* Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Doktori Iskola;  
MTA-SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoport*

*\*\* Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet Oktatásemélet Tanszék;  
MTA-SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoport*

A kombinatív gondolkodással kapcsolatos kutatások szerteágazók. Piaget vizsgálatai óta – aki szerint a formális gondolkodás kialakulásában a kombinatív gondolkodás központi szerepet tölt be (pl. Inhelder & Piaget, 1967; Piaget, 1970) – számos elméleti és empirikus eredmény született. Azonban több kutatás (pl. Mashiach-Eizenberg & Zaslavsky, 2004; Melusova & Vidermanova, 2015; Szitányi & Csíkos, 2015) is felhívja a figyelmet a terület nehézségére és kihívásaira, aminek fényében érthető Lockwood (2015) megállapítása, miszerint szükség van további, a kombinatív gondolkodással kapcsolatos kutatásokra, hiszen bőven tanulhatunk még a témáról. A kapcsolódó kutatások relevanciáját mutatja az is, hogy a kombinatorika tanítása, a kombinatív gondolkodás fejlesztése más területekre is pozitív hatással lehet. Különböző tudományterületek, például a mérnöki, a természet- és a társadalomtudományok is igényelnek kombinatorikai ismereteket (Kapur, 1970; DeTemple & Webb, 2014). A kombinatív gondolkodás szerepet játszik a problémamegoldásban (English, 1993, 2005; Wu & Molnár, 2018), a valószínűségi gondolkodásban (Batanero, Godino & Navarra-Pelayo, 1997; English, 2005), valamint fontos összetevője a kísérleti gondolkodásnak (Poddiakov, 2011), az alkotóképességnek, a kreativitásnak (Csapó, 1987; Simonton, 2010), illetve a természettudományos ismeretek megértésének (Bitner, 1991; Cavallo, 1996; Yilmaz & Alp, 2006).

Mindezek alapján fontosnak tartjuk a kombinatív gondolkodás fejlődésének segítését, amihez iskolai keretek között nagyban hozzájárulhatnak az egyszerűen használható mérőeszközök és az eredmények diagnosztikus kiértékelésére alkalmas módszerek. Rendelkezésünkre állnak a szóban forgó gondolkodás mérésére kifejlesztett hazai papíralapú (Csapó, 2003; Nagy, 2004; Hajduné Holló, 2004) és számítógépes (Csapó & Pásztor, 2015; Szabó & Korom, 2017) mérőeszközök, melyek felsoroló kombinatív problémák megoldását kérik a tanulóktól. Azonban, ahogyan látni fogjuk, a válaszok kiértékelése összetett, és bár vannak jól használható javaslatok (Csapó, 1988; Nagy, 2004; Zentai, Hajduné Holló, & Józsa, 2018), azok diagnosztikus értékelési szándék esetén kevéssé, vagy csak bizonyos esetekben informatívak. Ezért kutatásunk célja olyan módszertani

javaslatok kidolgozása, amelyek felsoroló kombinatív feladatok esetén hozzájárulnak a diagnosztikus, fejlesztést megalapozó értékeléshez. A tanulmányban bemutatjuk a felsoroló kombinatív feladatok megértésének vizsgálatára létrehozott változókat, valamint vizsgáljuk a kidolgozott változók alakulását egy 4. és 6. évfolyamosok körében végzett adatfelvétel kapcsán.

## **Szakirodalmi háttér, kutatási előzmények**

### **Kombinatorika, kombinatív gondolkodás**

A kombinatorikára, kombinatív gondolkodásra irányuló munkák többsége matematikai kontextusban, a matematika tanítása kapcsán foglalkoznak a témával (pl. Csapó, Csikos, & Molnár, 2015; DeTemple & Webb, 2014; English, 2005, 2016; Lockwood, 2013). Emellett megjelenik egy másik, általános pedagógiai, pszichológiai irány is, ami a kombinatív gondolkodásra mint a gondolkodási képesség egyik összetevőjére tekint (pl. Csapó, 1988, 2001; Inhelder & Piaget, 1967; Nagy, 2004; Zentai et al., 2018). A tanulmányban bemutatott kutatás a második megközelítéshez sorolható. A kétféle kontextusból adódóan vannak fogalmi és szemléletbeli különbségek, azonban az egyik paradigma elméleti megállapításai, kutatási eredményei számos esetben relevánsak és felhasználhatók a másokban is. A tanulmányok mindkét megközelítésben a kombinatorika, a kombinatív problémák és az alapvető kombinatív műveletek (kombinálás, variálás, permutálás) köré épülnek.

A témával foglalkozó elméleti, módszertani és empirikus munkák széles tartományban mozognak. Előfordulnak – többek között – módszertani anyagok, tanároknak szóló útmutatók a téma taníthatósága kapcsán (pl. Abramovich & Pieper, 1996; DeTemple & Webb, 2014; Kapur, 1970), valamint elméleti modelleket bemutató és a terület oktatásának jelenőségét hangsúlyozó írások (pl. Batanero et al., 1997; Csapó, 1988; Lockwood, 2013). Találkozhatunk a kombinatív problémákra adott megoldások minőségét (helyességét) elemző kutatásokkal (pl. Csapó, 2001; Csapó & Pásztor, 2015; Fishbein & Grosman, 1997; Mwamwenda, 1999; Nagy, 2004; Poddiakov, 2011), illetve a megoldások minősége mellett a feladatmegoldás folyamatával, a feladatmegoldási stratégiákkal is foglalkozó vizsgálatokkal (pl. English, 1991, 1993; Halani, 2012; Kosztolányi et al., 2016; Melusova & Vidermanova, 2015; Szitányi & Csikos, 2015). Az utóbbi két részterületnél felsorolt munkák a kombinatív feladatokra adott válaszok elemzésével foglalkoznak. Az eredmények összehasonlíthatóságát nehezíti, hogy a mérésekben használt feladatok különbözőek lehetnek. A feladattípusok azonosításában a Batanero, Godino és Navarra-Pelayo (1997) által leírt felosztás segíthet, ami a kombinatorikai problémák négy kategóriáját különbözteti meg. Ez alapján a feladatok irányulhatnak arra, hogy (1) van-e megoldása (létező problémák), (2) hány megoldása lehet egy problémának (számolási problémák), (3) adott esetben mi a legjobb megoldás (optimalizálási problémák), illetve (4) kérhetik az összes lehetséges megoldás felsorolását bizonyos feltételek mellett (felsorolási

vagy felsoroló problémák). Saját kutatásunk szempontjából a felsoroló problémákhoz kapcsolódó feladatokkal foglalkozó kutatások érdemelnek kiemelt figyelmet.

A különböző fókuszú munkák többféle értelmezésben és kontextusban használják a kombinatív gondolkodás (*combinatorial reasoning*) kifejezést, és nem adják meg – néhány kivételtől eltekintve – a pontos definícióját. Jelen tanulmányban – a hazai elméleti megközelítésekkel összhangban (Csapó, 1988; Nagy, 2000, 2004) – a kombinatív gondolkodás alatt egy meghatározott műveletekből álló elméleti konstruktumot értünk, ami a gondolkodási képesség egyik összetevője. Definiálására Adey és Csapó (2012) meghatározását használjuk, miszerint a „[...] kombinatív gondolkodás az a folyamat, melynek során megadott elemekből a feltételek által meghatározott összeállításokat kell létrehozni” (p. 34). A kombinatív gondolkodás mellett egy másik kifejezés, a kombinatív képesség is gyakran szerepel a hazai szakirodalomban (pl. Csapó, 1988, 2001; Hajduné Holló, 2004; Zentai et al., 2018; Nagy, 2004). Azonban Csapó és Pásztor (2015) javaslata alapján a kétféle elnevezést egymás szinonimájaként használhatjuk. Mindezt megerősíti, hogy a hazai pedagógiai megközelítésű munkák valóban ugyanazt értik a két fogalom alatt.

Visszatekintve a kombinatorikai problémák négy kategóriája közül a felsorolási vagy felsoroló problémákra (Batanero et al., 1997), belátható, hogy lényegét tekintve ezzel analóg a kombinatív gondolkodás általunk használt meghatározása. Ugyanis mind a kombinatív gondolkodás, mind a felsoroló kombinatív problémák mérésére alkalmas feladatokban megadott elemkészletből kell az összes lehetséges, egymástól különböző, a feladat feltételeinek megfelelő összeállítást felsorolni. Ahogy ezt a következő alfejezetben látni fogjuk, a hazai vizsgálatok (pl. Csapó, 2001; Csapó & Pásztor, 2015; Hajduné Holló, 2004; Nagy, 2004) a kombinatív gondolkodást mint meghatározott műveletekből felépülő konstruktumot vizsgálják. Ezzel szemben a nemzetközi munkák (pl. English, 1991, 1993; Fishbein & Grosman, 1997; Mwamwenda, 1999; Poddiakov, 2011) egy vagy néhány műveletre koncentrálnak, és a kombinatív gondolkodást mint rendszert nem vizsgálják. Mivel a kutatásokban használt feladatok értékelése szempontjából nem lényeges a mérés mögötti elméleti keret, ezért döntöttünk a tanulmány címében és a későbbiekben is a felsoroló kombinatív problémák kifejezés használata mellett. Ez a szókapcsolat mind a hazai, mind a nemzetközi vizsgálatokat tekintve megállja a helyét.

### **A felsoroló kombinatív problémák mérése**

A felsoroló kombinatív problémákra irányuló feladatokat tartalmazó mérőeszközök kétféleképpen lehetnek. A nemzetközi, többnyire matematikai megközelítésű munkák egy vagy néhány kombinatív művelet mérésére vállalkoznak, míg a hazai, pedagógiai szemléletű kutatások a kombinatív gondolkodást vizsgálják a műveleti struktúrának megfelelő feladatokkal.

A kombinatív gondolkodás kapcsán hazánkban két modell ismert. Csapó (1988, 2003) megközelítésében a képességet nyolc kombinatív művelet modellezi: Descartes-féle sorozatok, ismétléses variációk, ismétlés nélküli variációk, összes ismétléses variáció, ismétléses kombinációk, összes részhalmaz, ismétlés nélküli kombinációk, ismétléses permutációk. A modell alapján átfogó vizsgálatot végzett a kombinatív gondolkodás feltárására (Csapó, 1988), ami alapján a képességet legjobban reprezentáló feladatok kiválasztásával

létrejött egy 12 feladatból álló teszt (Csapó, 2001). A papíralapú mérőeszköz hat művelet értékelését teszi lehetővé, műveleteként egy képi és egy formális feladattal (az eredeti nyolc művelet közül az ismétléses kombinációk és az ismétléses permutációk kerültek ki). A technológiaalapú mérés-értékelés hazai terjedésének köszönhetően a tesztnek elkészült a digitalizált változata (Csapó & Pásztor, 2015).

A másik elméleti modell Nagy (2004) nevéhez fűződik, akinek értelmezésében az elemi kombinatív képesség négy készségből – ismétléses variálás, ismétlés nélküli variálás, ismétléses kombinálás, ismétlés nélküli kombinálás – és az elemfajta száma, illetve az összetételek hossza alapján 16 részkészségből áll. A modell alapján idősebb korosztály számára 16 formális (Nagy, 2004), míg fiatalabb korosztály vizsgálatára 16 manipulatív feladatot (Hajdúné Holló, 2004) tartalmazó mérőeszköz készült. E rendszerből kiindulva, az elemi kombinatív képesség mérésére kidolgoztak egy másik manipulatív tesztet is, mely a variálás, a kombinálás és a permutálás ismétlés nélküli és ismétléses változataira tartalmaz 10 feladatot (Zentai et al., 2018).

A nemzetközi munkák közül elsőként Piaget vizsgálatait említjük (as cited in Csapó, 1988), aki négy manipulatív feladatot alkalmazott kombinációk, permutációk, ismétléses variációk és összes részhalmaz műveletek kapcsán. English (1991, 1993) szintén manipulatív feladatokat alkalmazott kutatásaiban, melyek a Descartes-féle sorozatok művelettípus vizsgálatát tették lehetővé két és három halmazból álló elemkészlet mellett. Mwamwenda (1999) idősebb korosztályt vizsgált ismétlés nélküli permutációkra irányuló feladatokkal. Az említett három kutatás feladatai egyértelműen lefednek egy-egy kombinatív műveletet, míg további két vizsgálat feladatai (Poddiakov, 2011; Schröder, Bödeker, Edelstein, & Teo, 2000), bár lényegében szintén felsoroló kombinatív problémákon alapulnak, nem fednek le tisztán egy-egy műveletet. Schröder és munkatársai (2000) egy nagyszabású kutatás részeként használtak – többek között – kombinatív feladatokat, melyek leginkább az összes részhalmaz műveletre hasonlítottak, míg Poddiakov (2011) összetett működésű, kísérleti gondolkodást szimuláló eszközt használó vizsgálatá kapcsán nem tudunk egyértelműen párhuzamot vonni a használt feladatok és a tiszta kombinatív műveletek között.

A bemutatott kutatások egyaránt alkalmaznak, manipulatív, képi és formális feladatot a felsoroló kombinatív problémák mérésére. A különbségek leginkább az elemkészlet jellegében (tárgyi eszközök/képek/szimbólumok) és a válaszadás módjában (manuálisan összeállítani/ábrákon jelölni/írásban felsorolni) mutatkoznak. Mindemellett előfordulnak egyéni adatfelvételt igénylő, valamint papír-, illetve számítógép alapú mérőeszközök. Azonban a feladatok struktúráját tekintve azonosak az alkalmazott feladatok, így a feladatmegoldás kapcsán bizonyos fogalmak is egyetemesen használhatók. A továbbiakban *összeállítás*, *összetétel* és *konstrukció* alatt a feladatra adott válasz egy-egy elemét, az elemkészlet elemeiből létrehozott összetartozó egységeket értjük (formális feladat esetében pl. AB). Míg a *megoldás*, *kitöltés* vagy *válasz* szavakkal az összeállítások sorozatára, azaz a feladatra adott teljes válaszra utalunk.

### Válaszok értékelése felsoroló kombinatív feladatok esetében

A felsoroló kombinatív problémákat tartalmazó mérőeszközök feladataiban közös, hogy megadott elemekből, a feladat által kért feltételek szerint kell felsorolni az összes lehetséges, egymástól különböző összeállítást. A válaszadás (felsorolás) módja – ahogyan ezt az előző részben láttuk – eltérő lehet, azonban mindez a válaszok értékelésének logikáját nem befolyásolja (csupán az értékelés technikai megvalósítását, azonban ez jelen összefoglaló szempontjából nem lényeges). A válaszok kiértékelése során a legegyszerűbb, mindössze néhány különböző összeállítást kérő feladatoknál még kellően informatív lehet a hibás/hibátlan értékelési mód, ám ennél összetettebb esetekben könnyen belátható, hogy az említett dichotóm pontozás mellett nagy az információvesztesség, így ennél finomabb pontozási skálára van szükség. A felvázolt értékelési kihívásra a szakirodalomban három megoldás található, a következőkben ezeket ismertetjük.

A Csapó-féle modellen alapuló kutatások (pl. Csapó, 2001; Csapó & Pásztor, 2015; Szabó, Korom, & Pásztor, 2015) jellemzően az általa javasolt j-index (Csapó, 1988) mentén értékelik a válaszokat. A mutató a válaszban szereplő helyes (feladat feltételeinek megfelelő), valamint a helytelen (feladat feltételeinek nem megfelelő) és felesleges (helyes, de már szereplő) konstrukciók számát viszonyítja az összes lehetséges összeállítás darabszámához (a j-index kiszámítása: a helyes összeállítások számának és az összes lehetséges összeállítás, valamint a helytelen és felesleges összeállítások számának különbségének szorzata osztva az összes lehetséges összeállítás számának négyzetével). Az index minden esetben 0 és 1 közötti értéket vehet föl, ahol az 1-es érték jelenti a tökéletes megoldást, azaz a feladat feltételeinek megfelelő összes lehetséges konstrukció hibás és felesleges összeállítások nélküli felsorolását. Feladatok, tesztek esetében a vizsgált személyek teljesítményének leírására a mutató értékét százalékra átszámítva használják.

Nagy (2004) az elemi kombinatív képesség kapcsán négy szempont szerinti értékelést javasol. Az egyes változók két értéket vehetnek fel az alapján, hogy az adott szempontnak megfelelnek (1) vagy nem felelnek meg (0). Az első szempontnál a hibátlan és a hibás megoldást különbözteti meg, ahol hibátlan az a felsorolás, ami teljesen egyezik a javítókulcsban megadottal. A további három szempont a hibaelemzést teszi lehetővé, és a hibák jellegéről (tartalmi, mennyiségi) és mértékéről ad információt. Tartalmilag hibátlan egy megoldás, ha a felsorolt összeállítások helyesek, azaz megfelelnek a feladat feltételeinek, míg mennyiségileg hibátlan, ha az összetételek száma megegyezik az elvárttal, azaz nem több vagy kevesebb annál. A hibaelemzés első szempontja a mennyiségi hibára vonatkozik. A tartalmilag hibátlan és legfeljebb egy mennyiségi hibát (összetételek száma eggyel több vagy kevesebb) tartalmazó megoldás kap 1 pontot. A második szempont a tartalmi hibáról ad információt, ahol a mennyiségileg hibátlan és legfeljebb egy tartalmilag hibás összeállítást tartalmazó megoldásra jár az 1 pont. Végül az utolsó szempontra akkor adható 1 pont, ha legfeljebb egy tartalmi és egy mennyiségi hiba van a megoldásban. A leíratak alapján a hibaelemzés feltételezhetően értékes információkat nyújthat a megoldásokról, azonban arra hivatkozva, hogy az egy és négy szempont mentén való értékelés megbízhatósági mutatói egyaránt megfelelőek, csak az egyszerűbb, hibaelemzés nélküli értékelés eredményeiről számolnak be a kapcsolódó írásokban (I. Nagy, 2004, 2010; Hajduné Holló, 2004).

Zentai és munkatársai (2018) a Nagy-féle modellre épülő munkájukban a válaszok egy másik, szintén négy szempont mentén történő értékelését javasolják. Feltételezzük, hogy ennek háttérében a vizsgált korosztályok közötti különbségek állnak, míg Nagy (2004) 4., 5., 6., 8. és 10. évfolyamosok mérése kapcsán javasolja a bemutatott módszert, addig Zentai és munkatársai fiatalabb (4–8 éves) korosztályt vizsgálnak. Az általuk leírt értékelési rendszerben szintén két értéket vehetnek föl a változók az alapján, hogy megfelelnek az adott szempontnak vagy sem. A szempontok és az azoknak megfelelő megoldások a következők: (a) van legalább egy helyes összeállítás; (b) szerepel az összes lehetséges összeállítás; (c) van legalább egy helyes összeállítás, és nincs kétszer vagy többször szereplő összeállítás; (d) van legalább egy helyes összeállítás, és nincs hibás összeállítás. Ezzel az értékelési metodikával a szerzők a diagnosztikus értékelés megvalósítását és a fejlődés nyomon követésének támogatását tűzték ki célul.

A felsoroló kombinatív feladatok válaszaiknak értékelésére bemutatott három módszer a hibás/hibátlan értékelési dimenziónál részletesebb információt ad a válaszadók megoldásairól. Közös bennük, hogy – bár eltérő módon, de egyaránt – a feladat feltételeinek megfelelő helyes, a helyes, de ismétlődő, valamint a feladat feltételeinek nem megfelelő, helytelen összeállítások előfordulására építenek. A Csapó-féle j-index jól jellemzi a teljesítményt a felhasználható elemek és lehetséges összeállítások száma alapján egyszerűbb és összetettebb feladatok esetében, azonban diagnosztikus értékelési szándék esetén kevésbé informatív. A további két értékelési módszert az elemi kombinatív képesség (egyszerűbb feladatok) diagnosztikus értékelésére javasolják a kutatók, azonban kérdésesnek tartjuk, hogy a módszer összetettebb feladatok esetében megfelelően differenciálja-e a válaszokat. A leírtak alapján azt látjuk, hogy összetettebb felsoroló kombinatív feladatok esetén további javaslatok szükségesek a diagnosztikus, fejlesztést megalapozó értékelési módszer kialakításához.

## **A vizsgálat céljai és a kutatási kérdések**

Kutatásunk végső célja egy egyéni visszajelző rendszer kidolgozása, amely felsoroló kombinatív feladatok esetén hozzájárul a diagnosztikus, személyre szabott fejlesztést megalapozó értékeléshez. A visszajelző rendszerbe jelenleg három változócsoport beemelését javasoljuk. Az első csoportba – a válaszok kiértékelése kapcsán bemutatott három értékelési módszerből kiindulva – a feladat feltételeinek megfelelő helyes, a feltételeknek megfelelő, de korábban már szereplő ismétlődő, valamint a feladat feltételeinek nem megfelelő helytelen összeállítások száma kerülne. A következő csoport változói a feladat (adott kombinatív művelet) feltételeinek a megértéséről szolgálna információkkal. Végül a harmadik csoport a konstrukciók felsorolásának módjával, azaz a felsorolási stratégiákkal lenne összefüggésben. Kutatásunk jelen tanulmányban bemutatott fázisának célja (1) a feladatok (műveletek) megértésével kapcsolatos második csoport változóinak kidolgozása, valamint (2) ezen változók alakulásának, teljesítménnyel való összefüggésének és előrejelző szerepének vizsgálata 4. és 6. évfolyamosok körében.

A megfogalmazott célokkal összefüggésben a következő öt kutatási kérdést fogalmaztuk meg, melyek közül az elsőre pozitív válasz szükséges ahhoz, hogy a továbbiak vizsgálhatók legyenek. (K<sub>1</sub>) Meghatározhatók-e felsoroló kombinatív feladatok kapcsán olyan 0/1 értékű kritériumváltozók, amelyek alkalmasak adott feladat (kombinatív művelet) feltételeinek megértésének vizsgálatára a teljesítménytől függetlenül? (K<sub>2</sub>) Kiértékelhetők-e automatikusan a tanulói válaszok ezen kritériumváltozók mentén az általunk használt online mérőeszkővel végzett adatfelvétel esetében? (K<sub>3</sub>) Hogyan alakulnak a kritériumváltozók értékei a mérőeszkőben szereplő feladatok esetében a vizsgált mintán? (K<sub>4</sub>) Hogyan alakulnak a j-index alapján meghatározott feladat- és teszteljesítmények a kritériumoknak való megfelelés alapján a vizsgált mintán? (K<sub>5</sub>) Van-e szerepük a kritériumváltozóknak a teljesítményben az egyes feladatok esetében, és amennyiben igen, milyen arányban magyarázzák a teljesítményt?

A kutatás során azt feltételeztük, hogy meghatározhatók a kritériumok (változók), amelyek mentén vizsgálható a feladat (művelet) feltételeinek megértése, továbbá, hogy ezen kritériumok egyértelműen leírhatók a feladatok esetében. Emellett feltételeztük, hogy a definiált kritériumváltozók mentén kiértékelhetők a tanulói válaszok a használt online mérőeszkő esetében, és a kritériumoknak megfelelő válaszok feladatonkénti aránya és a feladatok nehézségi sorrendje (j-index szerint meghatározott teljesítmény alapján) között lesz összefüggés. Hipotézisünk szerint a több kritériumnak megfelelő válaszokhoz jobb feladat- és teszteljesítmény tartozik, valamint a kritériumoknak megfelelő válaszok aránya és a változók magyarázó ereje eltérően alakul az egyes műveletekhez kötődő feladatoknál. A változók alakulása és magyarázó ereje szempontjából hasonló tendenciákat várunk a két évfolyamon, az idősebbek esetében magasabb megfelelési arányokkal, de közel azonos varianciaértékekkel.

## **A feladatok megértésével kapcsolatos változók**

A feladatok megértését – felsoroló kombinatív feladatok esetében, a műveletek jellegéből adódóan – három feltétel mentén javasoljuk vizsgálni. Ezek (1) a konstrukció hossza: hány elemből állhatnak az összeállítások; (2) az elemek ismétlődése: egy összeállításban előfordulhatnak-e azonos elemek; valamint (3) az elemek sorrendje: az összeállításokban számít-e, hogy melyik elem hányadik helyen szerepel. A feltételek kapcsán megjegyezzük, hogy míg az utolsó kettő szorosan kapcsolódik az adott kombinatív művelethez (annyira, hogy a művelet határozza meg), addig az első részben független a művelettől és a feladat összetettségével hozható összefüggésbe.

A három feltétel vizsgálatára létrehoztunk egy-egy változót (elemszám, ismétlődés, felcserélhetőség), ami azt mutatja, hogy a megoldás (összeállítások sorozata) megfelel-e az adott szempontnak. A változók két értéket vehetnek föl a következők szerint: 0, ha nem felel meg, illetve 1, ha megfelel a megoldás az adott kritériumnak. A művelet jellegéből adódóan a három változónak két-két alesetét különböztetjük meg, és ezekhez tudjuk hozzárendelni a pontos kritériumokat. A változókat és a kritériumokat az 1. táblázat részletezi.

1. táblázat. A feladatok megértésével kapcsolatos változók, azok lehetséges feltételei, és az adott feltételnek megfelelő válaszok kritériumai

Változó	Feltétel	Kritérium
Elemszám	állandó	Minden összeállítás az előírt darabszámú elemből áll.
	tartomány	Minden előírt darabszámú összeállításból van legalább egy, és más hosszúságúból nincs egy sem.
Ismétlődés	nincs	Minden összeállítás különböző elemekből áll.
	van	Van legalább egy különböző és egy azonos elemekből álló összeállítás.
Felcserélhetőség	nincs	Nincs két összeállítás, amiben ugyanazok az elemek szerepelnek felcserélt sorrendben.
	van	Van legalább egy-egy összeállítás, amikben ugyanazok az elemek szerepelnek felcserélt sorrendben.

Az elemszám változónál (1. táblázat) az első esetben állandó hosszúságú elemekből álló összeállításokat kér a feladat (pl. két elem hosszú), míg a másik eset egy tartományt ír elő (pl. egy és kettő elem hosszú). Az ismétlődés és felcserélhetőség változónál az adott szempontot nem megengedő (nincs) és megengedő (van) eseteket különböztetjük meg. A táblázat harmadik oszlopa mindhárom változó mindkét alete (feltétele) esetében tartalmazza a pontos kritériumot, ami alapján eldönthető, hogy a megoldások megfelelnek-e az adott feltételnek.

Látható, hogy a változókhoz leírt kritériumok általános érvényűek. A vizsgálatok során minden konkrét feladatnál meg kell határozni az elemszám-feltételt, valamint kiválasztani az ismétlődés és a felcserélhetőség feltételét. Ezt követően lehet specifikálni azokat a paramétereket, amelyek alapján meghatározzuk a konkrét megoldásoknál a változók értékeit (0/1).

A bemutatott három változóra az előző fejezetben és ezt követően is előfordul, hogy a kritériumváltozó kifejezést használjuk. Ennek oka, hogy így szeretnénk utalni arra, hogy a változókat kritériumoknak való megfelelés vizsgálatára hoztuk létre.

## Módszerek

A továbbiakban kutatásunk második céljával, az előző fejezetben bemutatott, a műveletek megértését vizsgáló változók alakulásának és előrejelző szerepének vizsgálatával foglalkozunk. Először ismertetjük a vizsgálat módszereit, majd a következő fejezetben bemutatjuk az eredményeket.



## Minta

A kutatásban való részvételre az SZTE Oktatásméleti Kutatócsoport által a „A problémamegoldás sikerességét meghatározó tényezők feltérképezése és fejlesztése” című OTKA kutatás (Molnár, 2017) keretein belül 2017. január és május között megvalósított, „Gondolkodási képességek átfogó mérése” felméréssorozatában részt vevő iskolákat kértük föl. Ennek oka, hogy kutatási programunk keretében tervezzük vizsgálni a saját eredményeink és a felméréssorozatban szereplő néhány teszt (várhatóan: interaktív problémamegoldó képesség, induktív gondolkodás, kreativitás, vizuális memória) eredményének kapcsolatát tanulói szinten. Kutatásunk célcsoportját két évfolyam, az alsó tagozatot befejező 4. évfolyam, valamint a felső tagozat derekán járó 6. évfolyam alkotja. Ennek megfelelően a felkérést a „Gondolkodási képességek átfogó mérése” vizsgálatban 3. és/vagy 5. évfolyamos osztályaikkal részt vevő iskoláknak küldtük ki, akik önként jelentkezhettek a kutatásba.

A vizsgálatban 35 iskola vett részt az ország különböző részeiről, melyek között fővárosi (2 db), megyei jogú városi (4 db), városi (10 db), nagyközségi (2 db) és községi (14 db) intézmények egyaránt megtalálhatók. A 4. évfolyamon 44 osztály (N=790), a 6. évfolyamon 41 osztály (N=751) tanulónak adatai állnak rendelkezésünkre. Azonban a tanulmányban bemutatott elemzéseket nem a teljes mintán, hanem a 2. táblázatban szereplő szűkített mintán végeztünk (a két részminta elemszámának egyezése nem szándékos).

2. táblázat. Az adatelemzésbe bevont minta jellemzői

Részminta	N (fő)	Fiú* (%)	Lány* (%)	Életkor (év)	
				átlag	szórás
4. évfolyam	482	43,36	56,22	9,35	0,50
6. évfolyam	482	46,47	53,32	11,37	0,44

Megjegyzés: \* 4. évfolyamon 2 fő, 6. évfolyamon 1 fő nem válaszolt.

A jól látható elemszámcsökkenés oka (2. táblázat), hogy két szempont miatt a teljes minta több mint egyharmadát kizártuk. Egyrészt jelen elemzésbe csak azokat a tanulókat vontuk be, akik a mérőeszköz minden feladatára adtak valamilyen megoldást, így a legalább egy feladatot figyelmen kívül hagyó tanulókat nem vettük be a szűkített mintába. Másrészt szintén nem elemeztük azok adatait, akiknél legalább egy feladat esetében legalább egy „lehetetlen válasz” látható (arra, hogy mit értünk lehetetlen válasz alatt, praktikus okokból a mérőeszköz bemutatása után, az Eljárások részben térünk ki).

## Mérőeszköz

Az adatfelvétel során használt online mérőeszköz három fő részből áll. Az első részben egy rövid háttérkérdőív (születési idő, nem, szülők iskolai végzettsége, tantárgyi érdemjegyek) és egy próbafeladat található. Ezt követi a mérőeszköz törzse, egy nyolc kombinatív

feladatot tartalmazó teszt. Végül nyolc kérdés következik, melyek a tanuló saját feladatmegoldásával kapcsolatos véleményére, illetve a teszthez hasonló feladatokkal kapcsolatos korábbi tapasztalataira irányulnak. Jelen tanulmány szempontjából a mérőeszköz középse része érdekes, így a továbbiakban ezt ismertetjük.

A nyolc feladatból álló teszt a Csapó által kifejlesztett kombinatív teszt digitalizált változatának (Csapó & Pásztor, 2015) átdolgozása és kiegészítése. Az eredeti mérőeszközben szereplő hat képi feladat struktúráján (művelet típusa, elemkészlet elemeinek száma, összeállítások hossza) és a tesztben elfoglalt sorrendjén nem változtattuk. Három feladatnál megtartottuk az eredeti feladat kontextusát, míg három esetben saját fejlesztésű feladatot használtunk. Az eredeti hat feladat elé beillesztettünk két új feladatot, melyek a tesztben már szereplő Descartes-féle sorozatok műveletértékelését teszik lehetővé kevésbé összetett esetekben (kisebb elemkészlet). A nyolc feladat egységes grafikát kapott, továbbá a feladatok jellege, elrendezése és az instrukciók felépítése is azonos lett.

A tesztben szereplő nyolc feladat részleteit a 3. táblázat mutatja, melyben – többek között – minden feladatnál feltüntettük a korábban ismertetett műveletek megértésével kapcsolatos változók kritériumait. A Descartes-féle sorozatokhoz kapcsolódó három feladatnál, a művelet jellegéből adódóan, az ismétlődés és felcserélhetőség kritériuma nem értelmezhető, így a feladat megértése kapcsán csupán az elemszám kritérium vizsgálható. A többi műveletnél mindhárom kritérium értelmezhető.

3. táblázat. A mérőeszköz teszt részének nyolc feladata és a feladatok főbb paraméterei

Sor- szám	Művelet	Elem- készlet	Kritériumok			Össze- állítá- sok (db)
			Elemszám	Ismétlődés	Felcserél- hetőség	
1.	Descartes-féle sorozatok	2x3	2	–	–	6
2.	Descartes-féle sorozatok	3x3	2	–	–	9
3.	Descartes-féle sorozatok	4x3	2	–	–	12
4.	Összes részhalmaz	4	1, 2, 3, 4	nincs	nincs	15
5.	Összes ismétléses variáció	4	1, 2	van	van	20
6.	Ismétlés nélküli variációk	5	2	nincs	van	20
7.	Ismétléses variációk	2	3	van	van	8
8.	Ismétlés nélküli kombinációk	5	3	nincs	nincs	10

Megjegyzés: „–” = a kritérium nem értelmezhető.

Az 1. ábra a mérőeszköz tesztrészének két, saját fejlesztésű feladatát mutatja. Ahogy az ábrán is látszik, a feladatok képernyőképének felső részén található az instrukció három bekezdésben. Ezt követi a megoldás során használható elemkészlet, majd a „kitölthető” rajzokat tartalmazó válaszadó terület. A feladatok többségénél az ábrán látható módon

Felsoroló kombinatív feladatok megértésének vizsgálata az elemszám, az ismétlődés és a felcserélhetőség kritériumok alapján

jelöltük a rajzokon az elemek lehetséges helyét, míg két esetben (4. Összes részhalmaz és 8. Ismétlés nélküli kombinációk) – a feladat jellegéből adódóan – a válaszadó terület ábráján nem jeleztük az elemek pontos helyét. A feladatmegoldás során az elemkészlet elemeinek vonszolásával („drag and drop” technika) tudja a tanuló létrehozni a válaszadó terület rajzain az összeállításokat. Ahogy erre az instrukció is felhívja a figyelmet, minden feladatnál – eggyel, kettővel vagy hárommal – több rajz van, mint ahány különböző összeállítás.

Telefont és telefontokat szeretnénk vásárolni. A boltban a rajzokon lévő köztül választhatunk. Milyen lehetőségeink vannak a vásárlásra?  
Keresd meg az **összes különböző** lehetőséget! Mindegyik ábrán más megoldást jelölj!  
Húzd a kiválasztott **telefon** és **tokot** a képre! Vigyázz, **több hely van**, mint ahány különböző lehetőség!

A képeken szereplő öt barát ki szeretne próbálni egy tandembiciklit. Ki hova ülhet?  
Keresd meg az **összes különböző** lehetőséget! Mindegyik ábrán más megoldást jelölj!  
Húzd a kiválasztott **két gyereket** a tandembicikli képre! Vigyázz, **több hely van**, mint ahány különböző lehetőség!

1. ábra

A teszt 1. és 6. feladata (az első egy, az összes különböző összeállítást tartalmazó megoldást, míg a másik a megoldás előtti állapotot mutatja)

A feladatmegoldó által létrehozott, képernyőképen látható válaszokat – a műveletek jellegétől függően – kétféle módon rögzíti a rendszer, aminek a válaszok kiértékelésénél lesz jelentősége. Azoknál a feladatoknál (1–3.), ahol nem értelmezhető vagy nem számít, hogy milyen sorrendben szerepelnek az elemek az összeállításokban (4. és 8. feladatok), az egy rajzra behúzott elemet/elemeket egyben kezeli a rendszer. Míg a többi esetben, ahol számít az összeállításokban az elemek sorrendje (5–7. feladatok), a rajzokon belül külön rögzíti a rendszer, hogy a rajz egyes részeire került-e, és ha igen, milyen elem. A behúzott elemeket egyben kezelő rögzítési módnál említett első esetben szintén kijelölhetők lennének a rajzok egyes részei, azonban a különböző elemek okán ez felesleges. A másik verziónál olyan rajzokat használunk, amelyek nem bonthatók fel egyértelmű részekre, így nem megoldható a rajzokon belüli külön rögzítés.

## Eljárások

Az adatfelvétel 2017. december és 2018. január között valósult meg a részt vevő iskolák által szabadon megválasztott időpontokban, csoportos adatfelvétel keretében. A mérőeszközt az eDia online mérés-értékelési rendszerben (Molnár & Csapó, 2013, 2019; Molnár, 2015) közvetítettük ki a tanulóknak, akik az iskolai informatikateremben önállóan, felügyelet mellett dolgoztak. Az adatfelvétel lebonyolítására egy tanóra állt rendelkezésre. A megfelelő tesztelési körülmények megteremtésében előzetesen megküldött mérési útmutató segítette a helyi mérési koordinátorok munkáját.

A tanulók teljesítményét, a Csapó-féle elméleti keretet alkalmazó többi kutatásokhoz hasonlóan, a már ismertett j-index segítségével jellemeztük. A mutató, a technológia-alapú tesztelésnek köszönhetően, az adatfelvételt követően automatikusan megadható. Jelen adatfelvétel esetében a feladatok megértésével kapcsolatos változók értékeit a rögzített adatok alapján utólag értékeltük ki. Az értékelési eljárás kidolgozása során a feladatonként meghatározott kritériumok alapján, szakember segítségével létrejöttek a kiértékelést megvalósító kódok, melyeket többkörös tesztelést követően használtunk a változók értékeinek kiszámolására. Azonban az ezt követő adatfelvételeknél a feladatonként kidolgozott kódok beemelésével – a j-indexhez hasonlóan – a szóban forgó kritériumváltozók értékei automatikusan kiszámolhatók a tesztben szereplő (vagy azonos struktúrájú) feladatok esetében. Itt említjük meg, hogy azoknál a feladatoknál, ahol a művelet feltétele nem engedi meg a felcserélhetőséget (4. összes részhalmaz és 8. ismétlés nélküli kombinációk feladatok), bár definiálható ez a kritérium, a rögzített adatok alapján mégsem értékelhető. Ennek oka, hogy a válaszok a Mérőeszköz alfejezetben említett első válasZRögzítési mód alapján kerülnek az adatbázisba, emiatt az összeállításokban szereplő elemek sorrendjéről nem rendelkezünk információval. Így a felcserélhetőség kritériumának vizsgálatakor nem dönthető el, hogy a felsorolt összeállítások között azért szerepel két azonos elemekből álló összeállítás, mert azokat különbözőnek ítélte a válaszadó, vagy nem volt ilyen szándéka és ismétlődő összeállításról van szó. A leírtak alapján az említett két feladatonál a felcserélhetőség kritériumát nem vizsgáltuk, ezért nem szerepelnek ilyen adatok az eredmények bemutatásánál.

A feladatok megértésének vizsgálatára létrehozott változók két értéket vehetnek föl az alapján, hogy megfelelnek vagy sem az adott kritériumnak. Az eredmények ismertetésénél

kétféleképpen használjuk ezen kritériumváltozók értékeit. Egyrészt foglalkozunk az egyes kritériumoknak (elemszám, ismétlődés, felcserélhetőség) megfelelő válaszokkal feladatonként és a teljes teszt kapcsán. Másrészt az adott kritériumoktól függetlenül vizsgáljuk, hogy a válaszok hány kritériumnak felelnek meg. Ez alapján – a feladatok esetében – az adott feladattól függően 0/1, 0/1/2 és 0/1/2/3 kritériumnak megfelelő megoldás különül el. A teljes teszt kapcsán a feladatonkénti kritériumok összesítése alapján 0–16 kritériumnak megfelelő kitöltések (kritériumok a feladatok sorrendje alapján:  $1+1+1+2+3+3+3+2=16$ ) különíthetők el. A változókkal kapcsolatos eredményeket – a klasszikus tesztelmélet eszköztárát használva – gyakorisági eloszlások, t-próbák, varianciaanalízis (a minták azonos szórása esetén Tukey's-b, különböző szórása esetén Dunnett's T3 utóelemzéssel) és regresszióelemzés alapján ismertetjük. Az elemzésekhez IBM SPSS Statistics 24 programot használtunk.

Végül ebben a részben ismertetjük a „lehetetlen válasz” értelmezését, amit az 1. ábrán bemutatott két feladathoz kapcsolódó példákon keresztül teszünk meg. Ezen feladatok esetében lehetetlen válaszként értékeltük, ha a rögzített adatok például egy rajzra két különböző behúzott telefont és egy tokot mutatnak (1. feladatnál), vagy amikor az egyik bicikli első ülésén két vagy több különböző figurát jeleznek (6. feladatnál). Belátható, hogy az ilyen és ehhez hasonló válaszok eltérnek azoktól az esetektől, amikor a feladatmegoldó például egy rajzra behúz egy telefont, de tokot nem (1. feladatnál), vagy amikor csak az első ülésre helyez el figurát (6. feladatnál). Utóbbi esetekben a feladat feltételeinek nem megfelelő értelmezését feltételezhetjük, míg az előbbinél ez kevésbé valószínű. Mivel a „lehetetlennek” címkézett kitöltések létrejöttének okában bizonytalanok vagyunk (a feladatmegoldó – érthetetlen okból ugyan, de – szándékosan hozta létre, esetleg valamilyen adatrögzítési, adatfeldolgozási hiba okán jelentek meg), jobbnak láttuk kiszűrni ezeket a válaszokat. Ezen felül az ilyen kitöltéseket tartalmazó összeállítások értékelése túlmutat a helyes-felesleges-helytelen lehetőségeken, hiszen szigorúan véve egyik kategóriába sem tartoznak.

## Eredmények

A j-index értékei alapján az adatelemzésbe bevont mintán a teszt megfelelően működött mindkét évfolyamon (4. évfolyam: Cronbach- $\alpha=0,86$ ; 6. évfolyam: Cronbach- $\alpha=0,86$ ). A vizsgálatban részt vevő tanulók számára a teszt az átlagosnál valamivel könnyebb volt (4. évfolyam: átlag=59,79%p; szórás=21,46%p; 6. évfolyam: átlag=68,68%p; szórás=20,17%p), és az idősebb korosztály számottevően jobb teljesítményt ért el ( $|t|=6,62$   $p<0,01$ ). Ahogyan a 4. táblázatban látható, az egyes feladatokon nyújtott átlagteljesítmény széles tartományban szóródik mindkét évfolyamon, de minden esetben a 6. évfolyamosok teljesítettek jobban. A teljesítmények alapján a feladatok nehézségi sorrendje hasonlóan alakult a két évfolyamon (páros t-próbák alapján). A 4. évfolyamosok esetében az első három feladat volt a legkönnyebb, ezek nehézsége azonos, ezt követi a 7., a 6. és az 5. feladat, végül a legnehezebbnek a 4. és a 8. feladat bizonyult. Ettől minimálisan tér el a 6.

évfolyamon mutatkozó nehézségi sorrend, ahol a 2. és a 3. feladat volt a legkönnyebb, ezt követi az 1. feladat és innentől a sorrend azonos az alacsonyabb évfolyamnál leírttal.

4. táblázat. A feladatokon nyújtott teljesítmények évfolyamonként (j-index alapján, %p)

Feladat	4. évfolyam		6. évfolyam		t-próba	
	átlag	szórás	átlag	szórás	t	p
1. DSZ	75,92	31,00	80,22	29,36	2,21	<0,05
2. DSZ	76,04	33,07	85,09	26,80	4,67	<0,01
3. DSZ	76,83	30,96	85,53	25,22	4,78	<0,01
4. ÖRH	37,57	32,91	49,43	34,13	5,49	<0,01
5. ÖIV	51,99	26,74	59,38	25,69	4,37	<0,01
6. INV	59,31	29,12	67,42	27,84	4,22	<0,01
7. ISV	65,15	28,10	75,04	24,74	5,80	<0,01
8. INK	35,50	28,56	47,30	30,86	6,16	<0,01

Megjegyzés: DSZ: Descartes-féle sorozatok, ÖRH: összes részhalmaz, ÖIV: összes ismétléses variáció, INV: ismétlés nélküli variációk, ISV: ismétléses variációk, INK: ismétlés nélküli kombinációk.

### A kritériumoknak való megfelelés

Az 5. táblázat a teszt nyolc feladata esetében mutatja, hogy a releváns kritériumváltozó(k) feltételeinek a válaszok hány százaléka felel meg. Legalacsonyabb értékeket a 4. és az 5. feladatnál látunk, ahol 40–60% körüli az egyes feltételeknek megfelelő válaszok aránya. A többi feladatnál néhány esetben 70% körüli, de jellemzően 80% feletti a kritériumoknak megfelelő megoldások aránya. A változókat összevetve, az elemszám változónál mutatkozik a legnagyobb változatosság. Jellemzően 90% körüli a megfelelés azon esetekben, ahol állandó elemhosszúságú összeállításokat kér a feladat, és a válaszadó terület rajzain megjelenik az elemek lehetséges helye (1–3. DSZ, 6. INV, 7. ISV). Alacsonyabb, 70% körüli a megfelelés, ahol a fix elemhossz mellett a rajzokon nem jelennek meg az elemek pontos helyei (8. INK). Míg a legalacsonyabb (40–50%) értékek azoknál a feladatoknál jelennek meg, ahol változó elemszámú összeállításokat kér a feladat (4. ÖRH, 5. ÖIV). Azon feladatoknál, ahol az elemszám változó a legmagasabb megfelelési arányt mutatja, jellemzően ez az érték a legjobb a többi kritériumhoz képest. Míg ahol alacsonyabb az érték, ott a többi kritériumnál látunk magasabb megfelelési arányokat. A két évfolyam eredményeit összevetve – leszámítva, hogy az idősebb korosztályban egy kivétellel néhány százalékkal magasabb az adott kritériumnak megfelelő válaszok aránya –, hasonlóan alakul feladatonként és változónként a feltételnek megfelelő válaszok aránya.

Felsoroló kombinatív feladatok megértésének vizsgálata az elemszám, az ismétlődés és a felcserélhetőség kritériumok alapján

5. táblázat. Az egyes kritériumoknak megfelelő válaszok aránya (%) feladatonként

Feladat	Elemszám		Ismétlődés		Felcserélhetőség	
	4. évf.	6. évf.	4. évf.	6. évf.	4. évf.	6. évf.
1. DSZ	78,84	80,50	–	–	–	–
2. DSZ	90,04	88,80	–	–	–	–
3. DSZ	85,48	87,34	–	–	–	–
4. ÖRH	39,63	44,40	54,36	63,49	–	–
5. ÖIV	44,61	50,21	51,66	58,71	58,30	60,37
6. INV	91,29	95,02	73,24	80,08	70,12	71,37
7. ISV	89,00	91,29	78,42	84,65	85,68	92,12
8. INK	68,26	74,69	70,75	80,71	–	–

Megjegyzés: DSZ: Descartes-féle sorozatok, ÖRH: összes részhalmaz, ÖIV: összes ismétléses variáció, INV: ismétlés nélküli variációk, ISV: ismétléses variációk, INK: ismétlés nélküli kombinációk.

A következőkben azt ismertetjük, hogy az egyes feladatoknál hogyan alakul a 0/1, a 0/1/2 vagy a 0/1/2/3 kritériumnak megfelelő válaszok aránya (6. táblázat). Az első három, azonos művelethez kapcsolódó feladtnál egyetlen kritérium (elemszám) vizsgálható, így az adatok megegyeznek az előző, 5. táblázatban bemutatott eredményekkel. A továbbiakban ezekkel az adatokkal nem foglalkozunk, az összehasonlítások a maradék öt feladatra vonatkoznak.

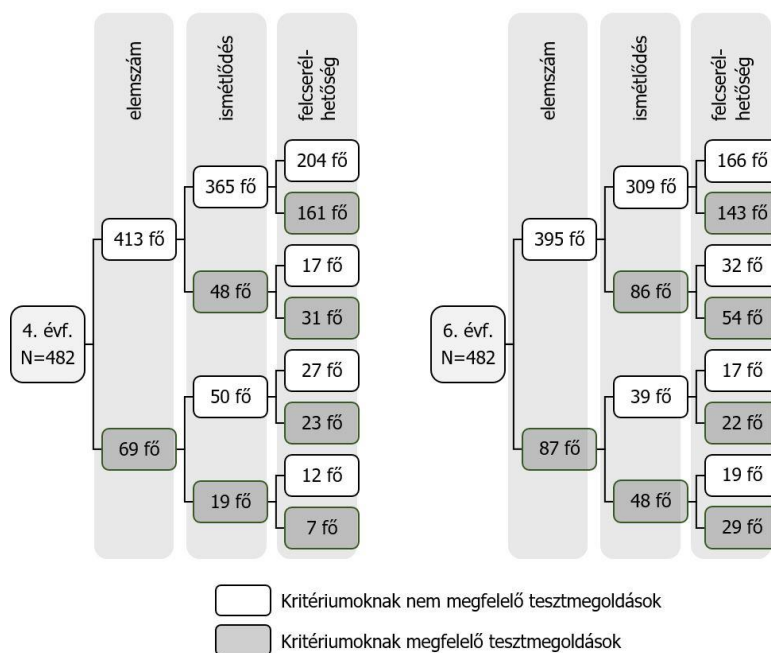
6. táblázat. 0/1, 0/1/2 vagy 0/1/2/3 kritériumnak megfelelő válaszok aránya (%) feladatonként

Feladat	0 kritérium		1 kritérium		2 kritérium		3 kritérium	
	4. évf.	6. évf.	4. évf.	6. évf.	4. évf.	6. évf.	4. évf.	6. évf.
1. DSZ	21,16	19,50	78,84	80,50				
2. DSZ	9,96	11,20	90,04	88,80				
3. DSZ	14,52	12,66	85,48	87,34				
4. ÖRH	31,33	27,39	43,36	37,34	25,31	35,27		
5. ÖIV	18,26	12,03	24,48	25,73	41,70	43,15	15,56	19,09
6. INV	0,83	0,41	10,37	7,05	42,12	38,17	46,68	54,36
7. ISV	2,28	0,62	6,43	3,94	27,18	22,20	64,11	73,24
8. INK	68,26	74,69	70,75	80,71	54,77	65,56		

Megjegyzés: DSZ: Descartes-féle sorozatok, ÖRH: összes részhalmaz, ÖIV: összes ismétléses variáció, INV: ismétlés nélküli variációk, ISV: ismétléses variációk, INK: ismétlés nélküli kombinációk.

A 6. táblázat alapján a teszt három utolsó feladatánál (6. INV, 7. ISV, 8. INK) a válaszok megoszlása az egyetlen feltételnek sem megfeleléstől sorra nő, és az összes kritériumnak megfelelő válaszok aránya a legmagasabb (45–75% körüli). A másik két feladatnál (4. ÖRH, 5. ÖIV) ez a növekedés csak az utolsó előtti kritériumig jellemző, utána visszaesést látunk. Utóbbi esetekben az összes kritériumnak megfelelő válaszok aránya 4. évfolyamon a legalacsonyabb, 6. évfolyamon pedig a második legalacsonyabb a kevesebb kritériumnak megfelelő válaszokhoz képest. Ha a feladatokat a 0 kritériumnak megfelelő válaszok alapján hasonlítjuk össze, a 4. feladatnál látjuk a legmagasabb, 30% körüli, míg a 6. és a 7. feladat esetében a legalacsonyabb értékeket. Végül az öt feladat közül az összes vizsgált kritériumnak megfelelő válaszok aránya a 7. feladatnál a legmagasabb és az 5. feladatnál a legalacsonyabb. Ahogy az egyes kritériumoknak megfelelő válaszok esetében, néhány apróságot leszámítva, itt sem tapasztalunk jellemző különbségeket a két évfolyam között.

Végül a teszt nyolc feladatát tekintve összesítve mutatjuk az egyes kritériumoknak megfelelő tesztmegoldások eloszlását (2. ábra). A kitöltés akkor felel meg globálisan egy-egy kritériumnak, ha az elemszámnál mind a nyolc, az ismétlődésnél az öt, valamint a felcserélhetőségénél a három releváns feladatra adott megoldás megfelel az adott kritériumnak.



2. ábra

*A tanulók tesztmegoldásainak eloszlása a három kritériumnak való megfelelés és nem megfelelés alapján a két évfolyamon (az egyes kritériumoknak az összes releváns feladatra adott válasz megfelel-e vagy sem)*



Felsoroló kombinatív feladatok megértésének vizsgálata az elemszám, az ismétlődés és a felcserélhetőség kritériumok alapján

A 2. ábra alapján az összes feladat összes vizsgált kritériumának a tesztmegoldások elenyésző része felel meg (4. évfolyamon 7 tanulóé, 6. évfolyamon 29 tanulóé). Emellett valamivel több, mint egyharmad, illetve egyharmad körüli (42,3 és 34,4%) azon válaszok aránya, amelyeknél nincs olyan kritérium, amelynek az összes releváns feladat esetében megfelel az adott megoldás. Az előbbihez hasonló arányban (42,5 és 39,8%) vannak azok a tanulók, akiknek a feladatmegoldása a három kritérium közül egynek minden esetben megfelel, míg kevesebb, mint egyötöd, illetve egyötöd körüli (13,6 és 19,7%) a két kritériumnak minden esetben megfelelő megoldások aránya. Végül számba vesszük, hogy az egyes kritériumoknak a válaszok milyen arányban felelnek meg az összes releváns feladatnál (a másik két kritériumnak való megfeleléstől függetlenül). A felcserélhetőség kritériumának mindhárom feladat esetében a megoldások közel fele felel meg (260 és 234 tanuló), míg az elemszám és az ismétlődés kritériumoknál ennél alacsonyabb, egymáshoz közel hasonló megfelelési arányokat tapasztalunk. Az előbbinél 15 és 20% körüli (413 és 395 tanuló), utóbbinál 15 és 30% körüli (415 és 348 tanuló) a kritériumoknak megfelelő megoldásokat produkáló tanulók aránya. Mindezek alapján látható, hogy az adatok a két évfolyamon – a fiatalabbaknál valamivel kisebb megfelelési arányok mellett – ebben az esetben is hasonlóan alakulnak.

#### A teljesítmények alakulása a kritériumoknak való megfelelés alapján

Az alfejezetben a feladatok, valamint a teljes teszt kapcsán ismertetjük az átlagteljesítmények alakulását a különböző számú kritériumnak megfelelő válaszok alapján képzett részmintákban. A 7. táblázat a nyolc feladat esetében mutatja a 0/1, a 0/1/2 vagy a 0/1/2/3 kritériumnak megfelelő válaszok alapján képzett részmintákban az átlagteljesítményeket.

7. táblázat. Feladatokon elért teljesítményátlagok (%p) a 0/1, 0/1/2 vagy 0/1/2/3 kritériumnak megfelelő válaszok alapján képzett részmintákban

Feladat	4. évfolyam				6. évfolyam			
	0 krit.	1 krit.	2 krit.	3 krit.	0 krit.	1 krit.	2 krit.	3 krit.
1. DSZ	42,43	84,91	–	–	50,03	87,53	–	–
2. DSZ	53,68	78,52	–	–	57,89	88,52	–	–
3. DSZ	53,39	80,82	–	–	62,84	88,81	–	–
4. ÖRH	13,80	30,85	78,51	–	17,78	42,83	81,00	–
5. ÖIV	13,67	41,19	63,31	83,62	16,29	45,26	66,72	88,96
6. INV	13,00	26,85	45,49	79,80	13,75	32,43	48,12	85,92
7. ISV	7,10	13,16	50,37	78,71	8,85	21,96	54,69	84,63
8. INK	4,72	17,42	54,09	–	11,49	18,96	63,35	–

Megjegyzés: A dőlt betűvel szedett esetekben a részminták elemszáma 30 fő alatti (4, 2 és 11, 3, 19 tanuló), a szövegben bemutatott elemzéseket ezen részmintákon nem végeztük el. DSZ: Descartes-féle sorozatok, ÖRH: összes részhalmaz, ÖIV: összes ismétléses variáció, INV: ismétlés nélküli variációk, ISV: ismétléses variációk, INK: ismétlés nélküli kombinációk.

Mindkét évfolyamon mind a nyolc feladatnál a kritériumok számának emelkedésével nő a teljesítmény (7. táblázat). A különbségek az első három feladatnál a t-próbák (4. évfolyam:  $|t|=6,51-13,63$   $p<0,01$ ; 6. évfolyam: t-próba:  $|t|=7,99-11,70$   $p<0,01$ ), a többinél a varianciaanalízisek (4. évfolyam:  $F=145,20-387,96$   $p<0,01$ ; 6. évfolyam:  $F=151,54-383,19$   $p<0,01$ ) és utóelemzéseik alapján számottevők. A statisztikai próbák eredményei azt mutatják (4. évfolyam:  $|t|=2,73-35,13$   $p<0,01$ ; 6. évfolyam:  $|t|=2,80-30,31$   $p<0,01$ ), hogy az évfolyamonkénti feladatátlagoknál (l. 4. táblázat) magasabb teljesítményt értek el azok a tanulók, akik minden kritériumnak megfelelő választ adtak, míg a többi részminta tanulói az átlagnál alacsonyabban teljesítettek. Ez az összefüggés minden feladatnál igaz, kivéve 4. évfolyamon a 2. feladatot, ahol a kritériumnak megfelelő tanulók részmintájának teljesítménye azonos a feladaton nyújtott átlagteljesítménnyel ( $t=1,56$   $p>0,05$ ).

A következőkben a teljes teszten nyújtott teljesítmény alakulását mutatjuk az alapján, hogy a tesztmegoldások a feladatoknál vizsgált összes kritérium közül összesítve hánynak felelnek meg. Az adatokat a 8. táblázat tartalmazza.

8. táblázat. A teszten nyújtott teljesítményátlagok (%p) a kritériumoknak való megfelelések összesítése alapján képzett részmintákban

Kritérium (db)*	4. évfolyam		6. évfolyam		4. évfolyam		6. évfolyam	
	N	Telj. (%p)	N	Telj. (%p)	N	Telj. (%p)	N	Telj. (%p)
2	1	13,93	0	–				
3	1	6,06	1	20,01				
4	3	15,63	0	–				
5	6	24,91	1	15,76	65	29,83	42	40,95
6	12	29,91	7	42,08				
7	16	28,07	11	33,52				
8	26	35,18	22	46,41				
9	46	42,01	30	49,21	46	42,01	30	49,21
10	64	47,85	55	50,13	64	47,85	55	50,13
11	64	60,38	68	62,46	64	60,38	68	62,46
12	75	65,02	69	69,57	75	65,02	69	69,57
13	61	73,51	60	74,21	61	73,51	60	74,21
14	57	76,24	76	81,91	57	76,24	76	81,91
15	43	85,36	53	88,43	50	86,27	82	90,52
16	7	91,84	29	94,35				

Megjegyzés: \* 0 vagy 1 kritériumnak megfelelő kitöltés egyik évfolyamon sem volt.

A 4. évfolyamon a kitöltések legalább kettő, míg a 6. évfolyamon legalább három kritériumnak megfelelnek, a változó mediánja mindkét évfolyamon 12 kritérium (8. táblá-

zat). Emellett látható, hogy a néhány (2–8), illetve az összes kritériumnak megfelelő válaszok kis számban fordulnak elő ( $N < 30$ ). Mivel a különböző számú kritériumnak megfelelő megoldásokhoz kapcsolódó teljesítményeket akartuk összehasonlítani, a 8. táblázat 2–5. oszlopában szereplő részmintáknál – az elemszámokra tekintettel – bizonyos esetekben összevonásokat végeztünk. Ahogy a táblázat 8–9. oszlopaiban látható, az alsó és felső tartományok egyesítésével nyolc részminta jött létre. Jellemzően a kritériumoknak való megfelelés növekedésével a teszten nyújtott teljesítmény is nő (4. évfolyam:  $F=131,01$   $p < 0,01$ ; 6. évfolyam:  $F=106,11$   $p < 0,01$ ). Az utóelemzés alapján 4. évfolyamon a legfeljebb nyolc kritériumnak megfelelő megoldást produkálók teljesítménye a legalacsonyabb, amit a 9-10, majd a 11-12, végül a 13-14 kritériumnak megfelelő megoldások követnek, míg a 15 és az összes kritériumnak megfelelő kitöltést produkálók teljesítménye a legmagasabb. A 6. évfolyamon is hasonló tendencia látható apróbb különbségekkel. Ebben az esetben a legfeljebb nyolc, a kilenc és a tíz kritériumnak megfelelő válaszkorlát a legalacsonyabb a teljesítmény, amit a 11, majd a 12-13, a 14, végül a 15 és 16 kritériumnak megfelelő kitöltések követnek.

A 4. évfolyamon az átlagteljesítményt (59,79%p) meghaladó teljesítményhez 12 vagy ennél több kritériumnak kell megfelelnie a megoldásoknak ( $|t|=3,46-29,02$   $p < 0,01$ ). A 11 kritériumnak való megfelelés az átlaggal egyező ( $|t|=0,39$   $p > 0,05$ ), míg a tíz vagy annál kevesebb kritériumnak megfelelő az átlagnál alacsonyabb teljesítményt eredményez ( $|t|=5,78-16,45$   $p < 0,01$ ). Ezzel szemben a 6. évfolyamon eggyel följebb tolnak a határok, itt a 12 kritériumnak megfelelő válaszok nem különböznek számottevően ( $|t|=0,62$   $p > 0,05$ ) az átlagnál (68,68%p). A 11 vagy annál kevesebb kritériumnak megfelelő válaszkorlátokhoz átlag alatti ( $|t|=3,62-10,45$   $p < 0,01$ ), a 13 vagy ennél többnek megfelelőkhöz pedig átlag feletti teljesítmények tartoznak ( $|t|=3,85-31,56$   $p < 0,01$ ).

### **A kritériumváltozók teljesítményt magyarázó ereje**

Az eredmények ismertetése végén a kritériumváltozóknak a teljesítmények varianciáját magyarázó erejével foglalkozunk. A nyolc feladatnál a releváns változók általegyesével, illetve összesen megmagyarázott varianciát a 9. táblázat mutatja.

A legnagyobb változatosságot az elemszám változó mutatja, ahol 2,5 és 34% közötti részesedéseket látunk (9. táblázat). Ha a feladatokon belüli változatosságot nézzük, a 6. feladatnál szóródik legnagyobb tartományban a változók magyarázó ereje. Az utolsó öt feladatnál, ahol kettő, illetve három változó mentén értékeltük a válaszokat, a válaszadó terület rajzainak jellege alapján eltérő tendenciák mutatkoznak a varianciák alakulásában. Azoknál a feladatoknál (4. összes részalmaz és 8. ismétlés nélküli kombinációk), ahol két kritérium értékelhető és a válaszadó terület rajzain nem jelennek meg az elemek pontos helyei, jellemzően az elemszám változó részesedése nagyobb a hatásból, mint az ismétlődés változóé (kivéve a 4. feladatnál 6. évfolyamon). A 4. feladatnál a változók közötti különbség kevesebb, mint 10%, míg a 8. feladatnál kétszeres körüli értékeket látunk. Ezzel szemben azoknál a feladatoknál (5. összes ismétléses variáció, 6. ismétlés nélküli variációk, 7. ismétléses variációk), ahol mindhárom változó értékelhető, és a válaszadó terület rajzain megjelennek az elemek lehetséges helyei, az elemszám változó magyarázó ereje a legalacsonyabb, amit jellemzően az ismétlődés, majd a felcserélhetőség követ (kivéve a 7.

feladatnál 6. évfolyamon). A változók közötti különbség, ahogy korábban már jeleztük, a 6. feladatnál a legnagyobb (öt-hatszoros, illetve kétszeres), míg a többi esetben jóval alacsonyabb (5–10% körüli variancia különbségek).

9. táblázat. Kritériumváltozók teljesítményt magyarázó ereje a teszt feladatainál ( $r^2$ %)

Feladat	Elemzés		Ismétlődés		Felcserélhetőség		Összesen*	
	4. évf.	6. évf.	4. évf.	6. évf.	4. évf.	6. évf.	4. évf.	6. évf.
1. DSZ	31,40	25,67					31,40	25,67
2. DSZ	5,07	13,2					5,07	13,2
3. DSZ	9,76	11,75					9,76	11,75
4. ÖRH	30,18	25,13	22,30	29,39			52,49	54,52
5. ÖIV	18,25	15,58	24,32	25,09	28,13	30,18	70,70	70,86
6. INV	2,57	2,88	15,33	15,49	31,08	36,06	48,98	54,43
7. ISV	13,17	12,03	18,80	19,11	21,52	17,74	53,50	48,88
8. INK	32,09	33,75	18,77	14,36			50,87	48,11

Megjegyzés: \*  $F=51,90-387,40$  és  $p<0,01$  értékek mellett, DSZ: Descartes-féle sorozatok, ÖRH: összes részhalmaz, ÖIV: összes ismétléses variáció, INV: ismétlés nélküli variációk, ISV: ismétléses variációk, INK: ismétlés nélküli kombinációk.

Végül a 9. táblázat utolsó oszlopa alapján nézzük feladatonként összesítve a bevont változó(k) által megmagyarázott varianciát. A Descartes-féle sorozatok művelettípushoz tartozó három feladat esetében a legalacsonyabbak az átlagos értékek. Ezek közül az első feladatnál még relatív magas (25–30%), míg a másik két esetben 10% körüli, vagy annál is alacsonyabb értékek mutatkoznak. Ezzel szemben a legmagasabb, 70% körüli értéket az 5. feladatnál látjuk, míg a maradék négy feladatnál 50% körül magyarázzák a változók a teljesítmény varianciáját. Ahogy az eddigi esetekben, a változók magyarázó ereje kapcsán is, néhány kisebb eltérést leszámítva, hasonló tendenciákat látunk a két évfolyamon.

### Az eredmények értelmezése

A kutatás két célkitűzése alapján először a műveletek megértésének vizsgálatára kidolgozott kritériumváltozókra reagálunk (1. alfejezet). Ezt követően térünk rá az adatfelvétel tapasztalataira a feladatok nehézsége (2. fejezet), majd a kritériumváltozókkal kapcsolatos eredmények értelmezése kapcsán (3–5. alfejezetek).

### A feladatok megértését vizsgáló kritériumváltozók

A feladatok feltételeinek megértését három szempont (változó) – az elemszám, az ismétlődés és a felcserélhetőség – mentén láttuk célszerűnek értékelni. Eredményeink jelzik, hogy mindhárom feltételhez meghatározhatók olyan általános érvényű kritériumok, amelyek alapján eldönthető, hogy egy megoldás megfelel-e az adott kritériumnak. A három változóhoz megadhatók úgy a kritériumok, hogy azok egymástól függetlenül, valóban csak az adott szempontnak való megfelelést vizsgálják. Továbbá, amennyire lehet, a változók a helyes konstrukcióktól (azaz a teljesítménytől) függetlenül mutatják a kritériumnak való megfelelést, vagyis nem veszik figyelembe, hogy a lehetséges összeállítások közül mennyit tartalmaz a válasz, és hogy vannak-e többször szereplő összeállítások. Egyedül az adott kritériumnak nem megfelelő helytelen konstrukciók esetében van összefüggés a teljesítmény és a változók értéke között, ez azonban belátható, hogy elkerülhetetlen. A leírtak alapján a változók meghatározhatóságával kapcsolatos kutatási kérdéseinkre ( $K_1$ ) pozitív választ kaptunk, a kapcsolódó feltételezésünk igazolódott.

Az általános kritériumok alapján az adatfelvételhez használt mérőeszköz feladatainál pontosan definiáltuk a kritériumokat. Az első három, Descartes-féle sorozatok művelethez kapcsolódó feladatnál a három kritérium közül csak egyet, az elemszámot vizsgáltuk. Bár elméletileg a másik két kritérium vizsgálata is lehetséges lenne, a feladatok jellegéből adódóan ezt feleslegesnek tartottuk. Ennek oka, hogy az összeállításokhoz az elemkészlet egyik, illetve másik halmazából kell egy-egy elemet kiválasztani, és ahogy a példafeladatban is látható (1. ábra), a válaszadó terület rajzain a két halmaz elemei egyértelműen elkülönülnek. Kevésbé konkrét és a válaszadást segítő ábrákat nem tartalmazó feladatok esetében elképzelhető, hogy releváns lehet a felcserélhetőség és ismétlődés vizsgálata, bár kevés olyan helyzetet tudunk elképzelni, ahol ez feltétlenül szükséges. A többi öt feladat közül – bár mindhárom kritérium értékes információt szolgáltat a feladat megértéséről – két esetben mégsem tudtuk értékelni a felcserélhetőséget a válaszrögzítési mód miatt. Az említett kivételeket leszámítva kidolgoztuk a rögzített válaszok alapján a változók értékeit feladatonként automatikusan kiértékelő kódokat. Így az elemszám kritériumát nyolc, az ismétlődését öt, a felcserélhetőségét három feladatnál tudtuk vizsgálni. Mindezek alapján, az említett korlátok mellett, a válaszok kiértékelhetőségéhez köthető kutatási kérdést ( $K_2$ ) relevánsnak, a kapcsolódó feltételezést pedig megerősítettnek tekintjük.

### A tesztfeladatok nehézsége

Az adatfelvétel eredményeivel kapcsolatban először a feladatok  $j$ -index alapján számított teljesítmény szerinti nehézségi sorrendjét tárgyaljuk. Korábbi vizsgálatunkban (Szabó & Korom, 2016;  $N=178$ ; korosztály: 3. évfolyam), ahol a Csapó-féle online kombinatív teszt hat képi feladatát használtuk, a mostanival (1. 4. táblázat) lényegében azonosan alakult a feladatok nehézségi sorrendje. Különbséget egyedül a két legnehezebb feladatnál tapasztaltunk. Míg a mostani adatfelvételnél az összes részhalmaz és az ismétlés nélküli kombinációk feladatok azonos nehézségűek voltak, addig a korábbi vizsgálatban az összes részhalmaz feladat nagyobb kihívást jelentett a tanulóknak. Egy további, szintén a Csapó-féle teszt digitalizált változatát használó kutatásban (Csapó & Pásztor, 2015;  $N_{3.évf.}=186$

és  $N_{4.évf.}=219$ ) a feladatátlagok alapján a 3. évfolyamon a jelen vizsgálattal azonos, a 4. évfolyamon pedig közel azonos nehézségi sorrend látható (a statisztikai próbák eredményeit a munka nem ismerteti). Mindezek alapján arra következtethetünk, hogy az eredeti teszt átdolgozása (a feladatkörnyezet változása) nem volt hatással a feladatok közötti nehézségi sorrendre.

Továbbá itt jegyezzük meg, hogy az eredeti Csapó-féle teszt és az áltatunk használt módosított változat nem különbözik abban, hogy a válaszadó terület rajzai mennyire segítik a feladatmegoldót. Azaz ugyanazon feladatok rajzainál jelennek meg, illetve nem jelennek meg az elemek pontos helyei. Ez nem véletlen, hiszen a művelet jellege befolyásolja a rajzok kialakítását.

### A kritériumoknak való megfelelés

A Descartes-féle sorozatok (1–3.), az ismétlés nélküli variációk (6.) és az ismétléses variációk (7.) műveletek feladatainál a legmagasabb az egyes kritériumoknak megfelelő válaszok aránya (l. 5. táblázat). Úgy gondoljuk, ennek egyik oka az, hogy vélhetően ezekben az esetekben támogatja leginkább a feladat környezete a feltételek megértését. Ezzel szemben a három legnehezebb feladtnál alacsonyabb értékeket kaptunk, melyek közül az összes részhalmaz (4.) és az összes ismétléses variációk (5.) feladatoknál kiugróan alacsonyak az értékek. Ez összefüggésben lehet egyrészt azzal, amire egy korábbi kutatásban (Szabó & Korom, 2016) rámutattunk, miszerint az összes részhalmaz művelethez kapcsolódó feladat meglehetősen problémás a tanulók számára. Másrészt összefügg azzal, hogy – a feladatfejlesztés tapasztalata alapján – az összes ismétléses variációk művelethez a legnehezebb életszerű és értelmezést segítő feladatot kidolgozni. Véleményünk szerint a leírtakat erősíti, hogy bár az ismétlés nélküli kombinációk (8.) feladat az egyik legnehezebb, az előbbi két feladathoz képest mégis magasabb megfelelési arányokat látunk, hiszen itt a feladat környezete vélhetően egyértelműbb a tanulók számára. Ha csak a mind a nyolc feladtnál vizsgált elemszám változó értékeit hasonlítjuk össze, az előzőhöz hasonló sorrendet látunk. A 4. és az 5. feladtnál a legalacsonyabbak a kritériumoknak megfelelő válaszok, ami összefügghet azzal, hogy ebben a két esetben nem állandó az elemek száma (1–4, illetve 1–2 elemből állhatnak az összeállítások). Ezen kívül a 8. feladtnál látunk még alacsony értékeket, ami mögött az is állhat, hogy ez az egyik olyan feladat, ahol a válaszadó terület ábráin nem jelennek meg pontosan az elemek helyei (a másik ilyen a 4. feladat). A többi feladat esetében jellemzően 85–90% fölötti a megfelelési arány, ami összefügghet azzal, hogy a válaszadó terület ábrái támogatják a megfelelő elemszámú összeállítások létrehozását. Végül megemlíjtük, hogy az első három Descartes-féle sorozatok művelettípus közül a legelső feladat esetében alacsonyabb az elemszámnak való megfelelés, ami összefüggésben lehet azzal, hogy ez a teszt legelső feladata.

A teszt utolsó öt feladata kapcsán a 0–2/3 kritériumnak megfelelő válaszok aránya (l. 6. táblázat) jellemzően nő a kritériumok számának növekedésével. Kivételt képez azon két feladat (4. összes részhalmaz és 5. összes ismétléses variáció), ahol az előző bekezdés alapján az egyes kritériumoknak megfelelő válaszok kiugróan alacsonyak. Itt eleinte növekedés, végül az összes kritériumnak megfelelő válaszoknál visszaesés tapasztalható. Ebből a szempontból feltehetően ezen feladatoknál van legtöbb támogatásra szükségük a

tanulóknak. Az adott kritériumnak való megfeleléshez hasonlóan alakulnak a nulla kritériumnak megfelelő válaszok, legnagyobb gyakoriság mellett a 4. feladat van a legrosszabb, és csupán néhány tanulóval a 6–7. feladat a legjobb helyzetben. Az előző és a mostani bekezdés eredményei alapján azt látjuk, hogy a művelet feltételeinek megértése szempontjából a 4. feladat (összes részhalmaz) a legproblémásabb. Mindez egybecseng a már említett vizsgálat (Szabó & Korom, 2016) megállapításával, ami szintén problémásnak tartotta ezt a feladatot. Továbbá figyelemreméltó, hogy bár nehézségét tekintve a 8. feladat az egyik legnehezebb, mégis ennél a második legmagasabb az összes kritériumnak megfelelő válaszok aránya. Összehasonlításként a másik legnehezebb (4. összes részhalmaz) feladatnál a második legalacsonyabb az összes kritériumnak megfelelő válaszok előfordulása. Ez alapján azt feltételezzük, hogy az ismétlés nélküli kombinációk feladatnál nem a feltételek megértése okozta a legnagyobb kihívást a tanulóknak, az alacsony teljesítmény mögött más tényezők állhatnak.

A kritériumoknak való megfelelés vizsgálata ( $K_3$ ) kapcsán előzetes elvárásunknak megfelelően alakult a feladatok nehézségi sorrendje és a kritériumoknak való megfelelés. Továbbá a kritériumoknak megfelelő válaszok aránya valóban eltéréseket mutat az egyes feladatok között. Itt emeljük ki ismét a 4. és az 5. feladatot, ahol a kritériumoknak való megfelelést nézve a legrosszabb eredményeket láttuk. Ez vélhetően összefügg azzal, hogy ezek a műveletek nagyobb kihívást jelentenek a tanulóknak. A kritériumoknak való megfelelés előzetes várakozásainkkal összhangban alakult, az idősebb korosztálynál magasabb megfelelési arányok mellett hasonló tendenciákat mutatva a feladatok és a változók esetében.

Végül fontosnak tarjuk megjegyezni, hogy feltételezhetően a feladat kontextusa és a válaszadás módja szerepet játszhat a kritériumoknak való megfelelésben. Az ebből a szempontból egyértelműbb feladatok segíthetik a feladat feltételeinek megértését, hozzájárulva a magasabb megfelelési arányokhoz. Ezért az egyes műveleteknél a feltételek megértésének összehasonlítását a bemutatott teszt kapcsán fenntartásokkal kell kezelnünk. Megbízhatóbb összehasonlítást tenne lehetővé, ha az összeállításokat nem ábrák segítségével kellene létrehozni, csupán megkötések nélkül felsorolni. Azonban a vizsgált korosztálynál ezt a feladattípust kevésbé támogatjuk, ráadásul az egysíkú feladatok a válaszadási hajlandóságot és a motivációt is negatívan befolyásolhatják. Továbbá hosszú távon nem a műveletek közötti pontos összehasonlítás, hanem a fejlesztés támogatása a cél, ami jelen feltételek mellett is teljesül.

### **A teljesítmények alakulása a kritériumoknak való megfelelés alapján**

Előzetes elvárásunknak megfelelően a feladatok (1. 7. táblázat) és a teszt (1. 8. táblázat) esetében is jellemzően a több kritériumnak megfelelő válaszokhoz jobb feladat- és teszt-teljesítmény tartozik ( $K_4$  kapcsán). A nyolc feladatnál a vizsgált összes (1/2/3) kritériumnak megfelelő megoldásokat adó tanulók átlagteljesítménye – egy kivétellel – 80–85% körüli. A kivétel a teszt utolsó és egyben legnehezebb feladata (8. ismétlés nélküli kombinációk), ahol csupán 50–60% körüli az átlagteljesítmény. Ezzel szemben az összesnél egygyel kevesebb kritériumnak megfelelő részmintáiban jellemzően 40–50% körüli a feladatteljesítmény (néhány esetben előfordul ennél alacsonyabb és magasabb érték is). A

több kritériumnak megfelelő megoldások számottevően jobb teljesítményt eredményeznek, és a részminták átlagteljesítményében számszerűen is jelentős ugrások tapasztalhatók. Természetesen nem véletlen a teljesítmény és a kritériumoknak való megfelelés közötti összefüggés. Mindez egyrészt utalhat arra, hogy a kidolgozott változók valóban visszajelzést adnak a feladatmegoldás minőségéről, másrészt feltételezhetjük, hogy amennyiben segítjük a tanulókat a feltételek azonosításában, növekszik a több helyes összeállítást tartalmazó válaszok száma.

### **A kritériumváltozók teljesítményt magyarázó ereje**

A mind a nyolc feladatnál vizsgált elemszám változó magyarázó ereje azon feladatoknál a legmagasabb (1. 9. táblázat), ahol a válaszadó terület rajzai kevésbé segítik a feltételnek való megfelelést (4. ÖRH, 8. INK: nincs az elemek pontos helye jelölve; 5. ÖIV: jelölve van, de egy és két elem hosszú összeállítások is lehetségesek). Emellett a teszt legelső (Descartes-féle sorozatok) feladatánál hasonlóan magas értéket látunk, ami a feladat tesztben elfoglalt helyével lehet összefüggésben. Utalva a kritériumoknak megfelelő válaszok arányáról leírtakra, láthatjuk, hogy hasonló tendenciák jelennek meg mindkét esetben, ami nyilvánvalóan nem véletlen.

A bevont kritériumváltozók által megmagyarázott variancia az 5. feladatnál a legmagasabb (70% körüli), aminek hátterében az is állhat, hogy ez az egyik legkevésbé egyértelmű feladat. A többi négy feladatnál, ahol legalább két kritériumváltozót vizsgáltunk, 50% körül magyarázzák a változók a teljesítmény varianciáját. Nem látunk különbséget a megmagyarázott variancia értékeiben az alapján, hogy két vagy három feltétel vizsgálata volt-e lehetséges.

Az eredmények alapján a műveletek megértése mellett további tényezők is befolyásolják a teljesítményt, azonban egyértelmű a kritériumváltozók szerepe a teljesítmény alakulásában ( $K_5$ ). Emellett, ahogy előzetesen vártuk, feladatonként mutatkozik eltérés a kritériumok magyarázó erejében. A magyarázó erő tekintetében a két évfolyamon hasonló tendenciák láthatóak.

## **Összegzés**

Kutatásunk célja felsoroló kombinatív feladatok megértésének vizsgálatára alkalmas változók meghatározása, valamint ezen változók alakulásának feltárása volt 4. és 6. évfolyamosok körében végzett adatfelvétel kapcsán. A tanulmányban bemutattunk három kritériumváltozót, melyek a feladat feltételének megfelelő elemszámra, az ismétlődő elemek előfordulására, valamint a kiválasztás sorrendjére, a felcserélhetőségre vonatkoznak. A megoldások elemzéséhez kijelöltük azokat az általános érvényű kritériumokat, amelyek meghatározzák a változók értékeit (0=nem felel meg, 1=megfelel a kritériumnak). Majd az általunk használt mérőeszköz feladataira specifikáltuk a változók kritériumait – a feladatok jellege és a kiértékelési lehetőségek miatt nem használtuk mindenhol mindhárom változót –, és az adatfelvétel során rögzített megoldásokra kiszámoltuk a változók értékeit.



Ezáltal lehetővé vált a három kritériumváltozó alakulásának elemzése a vizsgált mintán. A feladat (művelet) feltételeinek megértése szempontjából az összes részhalmaz és az összes ismétléses variáció feladat volt a legnehezebb, ezt követik az ismétlés nélküli kombi-náció és az ismétlés nélküli variáció műveletek, míg az ismétléses variáció és a Descartes-féle sorozatok feladatok feltételeinek felel meg a legtöbb megoldás. Feladatonként és a teljes teszt esetében jellemzően jobban teljesítettek (a j-index szerint meghatározott telje-sítmény alapján) azok a tanulók, akiknek a feladat- és tesztmegoldása több kritériumnak felel meg. A feladatokon nyújtott teljesítmények varianciáját az első három feladatnál – ahol egyedül az elemszám kritérium értékelhető – 10 és 30% körül, míg a többi öt feladat-nál – ahol két vagy három kritérium mentén értékelhetők a válaszok – 50%, és egy esetben 70% körül magyarázzák a kritériumváltozók. Emellett feladatonként eltérően alakul az egyes változók részesedése a hatásból. A kritériumváltozókkal kapcsolatos eredmények alapján a két vizsgált évfolyamot hasonló tendenciák jellemzik, azonban a 6. évfolyamon magasabb a kritériumoknak megfelelő válaszok aránya.

A kidolgozott kritériumváltozók a feladatokon nyújtott teljesítményen túl értékes in-formációt adnak a feladatok (műveletek) feltételeinek megértéséről, ezáltal hozzájárulhat-nak a feladatmegoldás során felmerülő nehézségek és problémák azonosításához. Kutatá-sunk következő fázisában „A vizsgálat céljai és a kutatási kérdések” fejezetben említett további két változócsoporttal (feltételnek megfelelő/megfelelő, de ismétlődő/nem megfe-lelő válaszok, valamint a konstrukciók felsorolásának módját mutató változók) kapcsola-tos elemzéseket tervezünk. Ezáltal felsoroló kombinatív feladatok kapcsán létrejön egy egyéni visszajelző rendszer, amely a teljesítménynél részletesebb információt ad a tanulók feladatmegoldásáról. A technológiaalapú mérés-értékelésnek köszönhetően az említett változók automatikusan meghatározhatók, így azokból azonnali, tanulónkénti visszajelzés készíthető. A leírtak nyomán a javasolt diagnosztikus értékelési rendszer könnyen hozzá-férhető, ezáltal segítség lehet az egyéni nehézségek meghatározásában és a fejlesztés meg-tervezésében.

#### *Köszönetnyilvánítás*

A kutatást az SZTE Oktatásméleti Kutatócsoport, valamint a Magyar Tudományos Akadémia Tan-tárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.

## **Irodalom**

- Abramovich, S., & Pieper, A. (1996). Fostering recursive thinking in combinatorics through the use of manipulatives and computing technology. *Mathematics Educator*, 7(1), 4–12.
- Adey, P., & Csapó, B. (2012). A természettudományos gondolkodásfejlesztése és értékelése. In B. Csapó & G. Szabó (Eds.), *Tartalmi keretek a természettudomány diagnosztikus értékeléséhez* (pp. 17–58). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Batanero, C., Godino J. D., & Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239–252). Amsterdam: IOS Press.

- Bitner, B. L. (1991). Formal operational reasoning modes: Predictors of critical thinking abilities and grades assigned by teachers in science and mathematics for students in grades nine through twelve. *Journal of Research in Science Teaching*, 28(3), 265–274. doi: [10.1002/tea.3660280307](https://doi.org/10.1002/tea.3660280307)
- Cavallo, A. M. L. (1996). Meaningful learning, reasoning ability and students' understanding and problem solving of genetics topics. *Journal of Research in Science Teaching*, 33(6), 625–656. doi: [10.1002/\(sici\)1098-2736\(199608\)33:6<625::aid-tea3>3.0.co;2-q](https://doi.org/10.1002/(sici)1098-2736(199608)33:6<625::aid-tea3>3.0.co;2-q)
- Csapó, B. (1987). A kombinatív képesség fejlesztése az általános iskolában. *Pedagógiai Szemle*, 37(9), 844–853.
- Csapó, B. (1988). *A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Csapó, B. (2001). A kombinatív képesség fejlődésének elemzése országos reprezentatív felmérés alapján. *Magyar Pedagógia*, 101(4), 511–530.
- Csapó, B. (2003). *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Csapó, B., & Pásztor, A. (2015). A kombinatív képesség fejlődésének mérése online tesztekkel. In B. Csapó & A. Zsolnai (Eds.), *Online diagnosztikus mérések az iskola kezdő szakaszában* (pp. 367–386). Budapest: Oktatókutatató és Fejlesztő Intézet.
- Csapó, B., Csíkos, Cs., & Molnár, G. (Eds.). (2015). *A matematikai tudás online diagnosztikus értékelésének tartalmi keretei*. Budapest: Oktatókutatató és Fejlesztő Intézet.
- DeTemple, D., & Webb, W. (2014). *Combinatorial reasoning. An introduction to the art of counting*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 22(5), 451–474. doi: [10.1007/bf00367908](https://doi.org/10.1007/bf00367908)
- English, L. D. (1993). Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 255–273. doi: [10.2307/749347](https://doi.org/10.2307/749347)
- English, L. D. (2005). Combinatorics And The Development Of Children's Combinatorial Reasoning. In Jones, G. A. (Ed.), *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 121–141). Dordrecht: Kluwer. doi: [10.1007/0-387-24530-8\\_6](https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_6)
- English, L. D. (2016). Revealing and capitalising on young children's mathematical potential. *ZDM Mathematics Education*, 48(7), 1079–1087. doi: [10.1007/s11858-016-0809-5](https://doi.org/10.1007/s11858-016-0809-5)
- Fishbein, E., & Grosman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 34(1), 27–47. doi: [10.1023/a:1002914202652](https://doi.org/10.1023/a:1002914202652)
- Hajduné Holló, K. (2004). Az elemi kombinatív képesség fejlődésének kritériumorientált diagnosztikus feltárása 4–8 évesek körében. *Magyar Pedagógia*, 104(3), 263–292.
- Halani, A. (2012). Students' ways of thinking about enumerative combinatorics solution sets: the odometer category. In Brown, S., Larsen, S., Marrongelle, K., & Oehrtman M. (Eds.), *Proceedings of the 15th annual conference on research in undergraduate mathematics education* (pp. 59–68). Portland, Oregon: The Special Interest Group of the Mathematics Association of America (SIGMAA) for Research in Undergraduate Mathematics Education.
- Inhelder, B., & Piaget, J. (1967). *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 3(1), 111–127.
- Kosztolányi, J., Pintér, K., Bagota, M., & Dancs, G. (2016). How do students solve combinatorial problems? – Some results of a research about difficulties and strategies of Hungarian students. In Cs. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education: PME40* (pp. 115–122). Szeged: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 251–265. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.008>

Felsoroló kombinatív feladatok megértésének vizsgálata az elemszám, az ismétlődés és a felcserélhetőség kritériumok alapján

- Lockwood, E. (2015). The strategy of solving smaller, similar problems in the context of combinatorial enumeration. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 339–362. doi: [10.1007/s40753-015-0016-8](https://doi.org/10.1007/s40753-015-0016-8)
- Mashiach-Eizenberg, M., & Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(1), 15–36. doi: [10.1207/s15327833mtl0601\\_2](https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0601_2)
- Melusova, J., & Vidermanova, K. (2015). Upper-secondary students' strategies for solving combinatorial problems. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 197, 1703–1709. doi: [10.1016/j.sbspro.2015.07.223](https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.07.223)
- Molnár, G. & Csapó, B. (2019). A diagnosztikus mérési rendszer technológiai keretei: Az eDia online platform. *Iskolakultúra*, 29(4–5), 16–32. doi: [10.14232/iskult.2019.4-5.16](https://doi.org/10.14232/iskult.2019.4-5.16)
- Molnár, G. (2015). A képességmérés dilemmái: a diagnosztikus mérések (eDia) szerepe és helye a magyar közoktatásban. *Géniusz Műhely Kiadványok*, 2, 16–29.
- Molnár, G. (2017). Az interaktív problémamegoldó képesség fejlettségi szintjét befolyásoló képességek. In J. Kerülő, T. Jenei, & I. Gyarmati (Eds.), *Program és absztrakt kötet. XVII. Országos Neveléstudományi Konferencia* (pp. 464). Nyíregyháza.
- Molnár, G., & Csapó, B. (2013). Az eDia online diagnosztikus mérési rendszer. In K. Józsa & J. B. Fejes (Eds.), *PÉK 2013. XI. Pedagógiai Értékelési Konferencia. Program – Előadás-összefoglalók* (pp. 82). Szeged: Szegedi Tudományegyetem.
- Mwamwenda, T. S. (1999). Undergraduate and graduate students' combinatorial reasoning and formal operations. *Journal of Genetic Psychology*, 160(4), 503–505. doi: [10.1080/00221329909595563](https://doi.org/10.1080/00221329909595563)
- Nagy, J. (2000). *XXI. század és nevelés*. Budapest: Osiris Kiadó.
- Nagy, J. (2004). Az elemi kombinatív képesség kialakulásának kritériumorientált diagnosztikus feltárása. *Iskolakultúra*, 14(8), 3–20.
- Nagy, J. (2010). *Új pedagógiai kultúra*. Szeged: Mozaik Kiadó.
- Piaget, J. (1970). *Válogatott tanulmányok*. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Poddiakov, A. (2011). Didactic objects for development of young children's combinatorial experimentation and causal-experimental thought. *International Journal of Early Years Education*, 19(1), 65–78. doi: [10.1080/09669760.2011.571001](https://doi.org/10.1080/09669760.2011.571001)
- Schröder, E., Bödeker, K., Edelstein, W., & Teo, T. (2000). Proportional, combinatorial, and correlational reasoning. A manual including measurement procedures and descriptive analyses. Study „Individual Development and Social Structure”. Data Handbooks Part 4. Berlin: Max Planck Institute for Human Development.
- Simonton, D. K. (2010). Creative thought as blind-variation and selective-retention: Combinatorial models of exceptional creativity. *Physics of life reviews*, 7(2), 156–179. doi: [10.1016/j.plrev.2010.02.002](https://doi.org/10.1016/j.plrev.2010.02.002)
- Szabó, Zs. G., & Korom, E. (2016). A feladatmegoldási idő vizsgálata kombinatív képességet mérő teszten 3. évfolyamosok körében. In G. Molnár & E. Bús (Eds.), *PÉK 2016. XIV. Pedagógiai Értékelési Konferencia. Program – Előadás-összefoglalók* (pp. 149). Szeged: Szegedi Tudományegyetem.
- Szabó, Zs. G., & Korom, E. (2017). Kombinatív stratégiák feltárására fejlesztett mérőeszköz és kipróbálásának előzetes eredményei. In J. Kerülő, T. Jenei, I. Gyarmati (Eds.), *XVII. Országos Neveléstudományi Konferencia. Program és absztrakt kötet* (pp. 510). Nyíregyháza: MTA Pedagógiai Tudományos Bizottság, Nyíregyházi Egyetem.
- Szabó, Zs. G., Korom, E., & Pásztor, A. (2015). A kombinatív képesség rövid távú fejleszthetősége 3. évfolyamon természettudományos kontextusban. *Magyar Pedagógia*, 115(4), 383–401. doi: [10.17670/mped.2015.4.383](https://doi.org/10.17670/mped.2015.4.383)
- Szitányi, J., & Csikos, Cs. (2015). Performance and strategy use in combinatorial reasoning among pre-service elementary teachers. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 4225–4232). Hobart: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

- Wu, H., & Molnár, G. (2018). Interactive problem solving: Assessment and relations to combinatorial and inductive reasoning. *Journal of Psychological and Educational Research*, 26(1), 90–105.
- Yilmaz, A., & Alp, E. (2006). Students' understanding of matter: the effect of reasoning ability and grade level. *Chemistry Education Research and Practice*, 7(1), 22–31. doi: [10.1039/b5rp90013a](https://doi.org/10.1039/b5rp90013a)
- Zentai, G., Hajduné Holló, K., & Józsa, K. (2018). Új mérőeszközök a gondolkodás vizsgálatára 4–8 éves korban. In O. Endrődy-Nagy & A. Fehérvári (Eds.), *HERA évkönyv 2017: Innováció, kutatás, pedagógusok* (pp. 175–189). Budapest: Magyar Nevelés- és Oktatókutatók Egyesülete.

Felsoroló kombinatorív feladatok megértésének vizsgálata az elemszám, az ismétlődés és a felcserélhetőség kritériumok alapján

## ABSTRACT

ANALYZING THE UNDERSTANDING OF ENUMERATIVE COMBINATORIAL PROBLEMS BASED ON ELEMENT NUMBER, REPETITION AND REVERSIBILITY

Zsófia Gál-Szabó & Erzsébet Korom

Hungarian studies measure students' combinatorial reasoning with enumerative combinatorial tasks. Evaluating students' responses in these tasks is a challenge, for which researchers recommend different solutions. Studies in the framework of Csapó's (1988) theoretical model (e.g. Csapó, 2001; Csapó & Pásztor, 2015; Szabó, Korom, & Pásztor, 2015) use j-index, which takes the correct and incorrect solutions into consideration. In contrast, researches in Nagy's model (2004) evaluate the solutions along one or four criteria (see Nagy, 2004; Hajduné Holló, 2004; Zentai, Hajduné Holló & Józsa 2018). Although these methods are suitable to evaluate students' combinatorial reasoning performance, using them for diagnostic assessment has limitations. Therefore, the aim of our study is to develop an evaluation method, which can support the diagnostic assessment of combinatorial reasoning. In this context, we (1) define variables for analyzing the understanding of the criteria described in the tasks, and (2) examine the impact of the variables among 4<sup>th</sup> and 6<sup>th</sup> graders. Based on the nature of combinatorial operations, we defined three variables for analyzing the understanding of combinatorial tasks. These are as follows: (1) element number, i.e., the number of elements corresponding to the task condition, (2) repetition, i.e., the occurrence of repetitive elements, and (3) reversibility, i.e., the order of selection. According to the condition, the variables can take two values: does not meet the condition (0), meets the condition (1). After the generic definition of the criteria of variables, we specified these for the tasks of our test, which is a computer-based instrument with eight combinatorial tasks. The variables were analyzed in Grade 4 (N=482) and Grade 6 (N=482). Results revealed that the rate of the solutions corresponding to the criteria were different among the tasks. As we expected, solutions which met more conditions belonged to better task and test performances. Looking at the explanatory power of the variables, their roles are clear in tasks performances, but differences are shown in the explanatory power of the variables among the tasks. The developed variables can contribute to identifying the problems during students' task solving processes. The values of variables can be calculated automatically, so the online diagnostic assessment system can give immediate feedback for each student. Therefore, our findings can help to design programs for developing combinatorial reasoning.

Magyar Pedagógia, 118(4). 385–413. (2018)  
DOI: 10.17670/MPed.2018.4.385

Levelezési cím / Address for correspondence:

Gál-Szabó Zsófia, Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Doktori Iskola; MTA-SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoport. H-6722 Szeged, Petőfi Sándor sgt. 30–34.

Korom Erzsébet, Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet Oktatásmélt Tanszék; MTA-SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoport H-6722 Szeged, Petőfi Sándor sgt. 30–34.